



2011年 理工学部 第2問

2 多項式  $f(x) = x^4 - x^3 + cx^2 - 11x + d$  について、 $f(1 + \sqrt{2}) = 0$  が成り立つとする。ここで、 $c, d$  は有理数とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $S = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \text{ は有理数}\}$  とする。集合  $S$  の元  $z = a + \sqrt{2}b$  (ただし、 $a, b$  は有理数) に対して、 $j(z) = a - \sqrt{2}b$  と定義する。 $S$  の任意の元  $z, w$  に対して、 $j(z + w) = j(z) + j(w)$  および  $j(zw) = j(z)j(w)$  が成り立つことを示せ。
- (2) (1) を用いて、 $S$  の元  $z$  が  $f(z) = 0$  を満たせば、 $f(j(z)) = 0$  が成り立つことを示せ。このことを用いて、 $f(1 - \sqrt{2}) = 0$  を示せ。
- (3) 有理数  $c, d$  を求め、 $f(x)$  を有理数の範囲で因数分解せよ。