0002011188897999

長崎大学

2015年 経済・水産・環境科学部 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 2つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2a^2$$

を考える．ただし，$a > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 C_2 の頂点の座標を a を用いて表せ．

(2) 2つの放物線 C_1，C_2 の共通接線を ℓ とし，C_1 と ℓ との接点の x 座標を p，C_2 と ℓ との接点の x 座標を q とする．p と q の値および ℓ の方程式を，それぞれ a を用いて表せ．

(3) 放物線 C_1，C_2 および接線 ℓ によって囲まれた図形の面積を S_1 とする．S_1 を a を用いて表せ．

(4) 点 $\left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a^2}{4}\right)$ における C_1 の接線を m とする．このとき，m の方程式を a を用いて表せ．また，m と接線 ℓ との交点の x 座標を求めよ．

(5) 放物線 C_1 および接線 ℓ，m によって囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_2 を a を用いて表せ．さらに，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ．

(1) $C_2 : y = (x-a)^2 + a^2$ $\therefore$ C_2 の頂点は $\underline{(a, a^2)}$ //

(2) まず C_1 において接点を (p, p^2) とおくと，$y' = 2x$ より

$\ell : y = 2p(x-p) + p^2$ 　すなわち $\ell : y = 2px - p^2 \cdots ①$

次に C_2 において接点を $(q, q^2 - 2aq + 2a^2)$ とおくと，$y' = 2x - 2a$ より

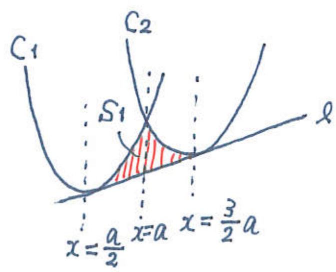
$\ell : y = 2(q-a)(x-q) + q^2 - 2aq + 2a^2$ 　すなわち $\ell : y = 2(q-a)x - q^2 + 2a^2 \cdots ②$

①と②の係数を比較して，

$$\begin{cases} 2p = 2(q-a) & \cdots ③ \\ -p^2 = -q^2 + 2a^2 & \cdots ④ \end{cases}$$

③，④と $a > 0$ より，$\underline{p = \dfrac{a}{2},\ q = \dfrac{3}{2}a}$ //

このとき，$\underline{\ell : y = ax - \dfrac{a^2}{4}}$ //



(3) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めると，$x^2 - (x^2 - 2ax + 2a^2) = 0$

$\therefore x = a$

$$\therefore S_1 = \int_{\frac{1}{2}a}^{a} x^2 - \left(ax - \frac{a^2}{4}\right) dx + \int_{a}^{\frac{3}{2}a} x^2 - 2ax + 2a^2 - \left(ax - \frac{a^2}{4}\right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}a}^{a} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 dx + \int_{a}^{\frac{3}{2}a} \left(x - \frac{3}{2}a\right)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{a}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}a}^{a} + \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}a\right)^3\right]_{a}^{\frac{3}{2}a}$$

$$= \underline{\frac{1}{12}a^3}$$ //

長崎大学

2015年 経済・水産・環境科学部 第1問 2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 2つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2a^2$$

を考える．ただし，$a > 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 C_2 の頂点の座標を a を用いて表せ．

(2) 2つの放物線 C_1，C_2 の共通接線を ℓ とし，C_1 と ℓ との接点の x 座標を p，C_2 と ℓ との接点の x 座標を q とする．p と q の値および ℓ の方程式を，それぞれ a を用いて表せ．

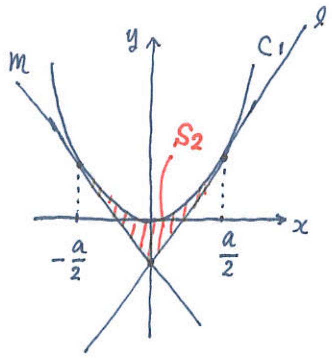
(3) 放物線 C_1，C_2 および接線 ℓ によって囲まれた図形の面積を S_1 とする．S_1 を a を用いて表せ．

(4) 点 $\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ における C_1 の接線を m とする．このとき，m の方程式を a を用いて表せ．また，m と接線 ℓ との交点の x 座標を求めよ．

(5) 放物線 C_1 および接線 ℓ，m によって囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_2 を a を用いて表せ．さらに，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ．

(4) $m : y = -a\left(x + \frac{a}{2}\right) + \frac{a^2}{4}$ $\quad \therefore \underline{m : y = -ax - \frac{a^2}{4}}$ //

$ax - \frac{a^2}{4} - \left(-ax - \frac{a^2}{4}\right) = 0 \quad \therefore \underline{x = 0}$ //



(5) y軸に関して対称なので

$$S_2 = 2\int_0^{\frac{a}{2}} x^2 - \left(ax - \frac{a^2}{4}\right) dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{a}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{a}{2}}$$

$$= \underline{\frac{1}{12}a^3} \text{ //}$$

$$\therefore \underline{\frac{S_2}{S_1} = 1} \text{ //}$$