東京海洋大学

2016年 海洋科学 第4問

$\boxed{4}$ $\triangle$ABCに対し $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ として

$$\overrightarrow{p}=\left|\overrightarrow{a}\right|\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|\overrightarrow{c}+\left|\overrightarrow{c}\right|\overrightarrow{a}$$

によってベクトル $\overrightarrow{p}$ を定めるとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{0}$ は $\triangle$ABCが正三角形であるための必要十分条件であることを証明せよ．
(2) $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}$ かつ $\left|\overrightarrow{p}\right|=4$ のとき，$\cos\angle$ABC の値を求めよ．

(1) ・$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{0} \Rightarrow \triangle ABC$ は正三角形 を示す

$\overrightarrow{p}=|\overrightarrow{a}|\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{b}|\cdot\overrightarrow{CA}+|\overrightarrow{c}|\cdot\overrightarrow{AB}$

$\quad=|\overrightarrow{a}|(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-|\overrightarrow{b}|\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{c}|\overrightarrow{AB}\quad\cdots(*)$

$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{0}$ のとき，$(*)$ は，$(|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{c}|)\overrightarrow{AB}=(|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|)\overrightarrow{AC}$ となる．

$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$ より，$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|$ となり，$\triangle ABC$ は正三角形となる．

・$\triangle ABC$ は正三角形 $\Rightarrow \overrightarrow{p}=\overrightarrow{0}$ を示す

$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=l$ （l は正の実数）とおくと，

$\overrightarrow{p}=l(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$

$\quad=l(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$

$\quad=\overrightarrow{0}$

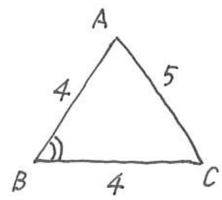
以上より，$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{0}$ は $\triangle ABC$ が正三角形であるための必要十分条件である ■

(2) $(*)$ より，

$\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{a}|(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-|\overrightarrow{b}|\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{c}|\overrightarrow{AB}$

$|\overrightarrow{p}|=|\overrightarrow{a}|=4$ より，$(5-|\overrightarrow{c}|)\overrightarrow{AB}=(4-|\overrightarrow{b}|)\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$ より，$|\overrightarrow{b}|=4$, $|\overrightarrow{c}|=5$



$$\cos\angle ABC=\frac{4^2+4^2-5^2}{2\cdot4\cdot4}$$

$$=\underline{\frac{7}{32}}$$