0001840549518999

宮城教育大学

2014年 第4問

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = e^{\sqrt{2}\sin x}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，関数 $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) a を実数とする．関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とするとき，x の方程式 $f'(x) = a$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における実数解の個数を求めよ．

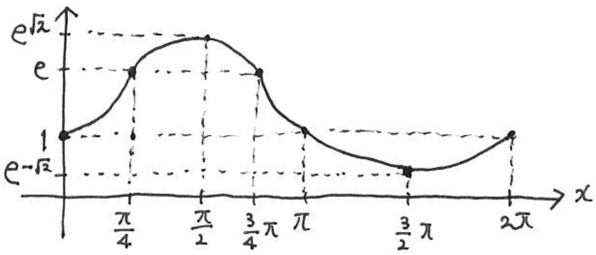
(1) $f'(x) = \sqrt{2}\cos x \cdot e^{\sqrt{2}\sin x}$, $f''(x) = -\sqrt{2}\sin x\, e^{\sqrt{2}\sin x} + \sqrt{2}\cos x \cdot \sqrt{2}\cos x\, e^{\sqrt{2}\sin x}$

$= e^{\sqrt{2}\sin x}(-2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 2)$

$f'(x) = 0$ となるのは，$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

$f''(x) = 0$ となるのは，$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	+	+	0	−	−	−	0	+	
$f''(x)$		+	0	−	−	−	0	+	+	+	
$f(x)$	1	↗	e	↗	$e^{\sqrt{2}}$	↘	e	↘	$e^{-\sqrt{2}}$	↗	1



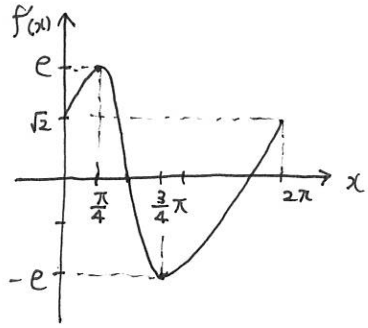
極大値 $e^{\sqrt{2}}$ ($x = \frac{\pi}{2}$ のとき)

極小値 $e^{-\sqrt{2}}$ ($x = \frac{3}{2}\pi$ のとき)

変曲点 $(\frac{\pi}{4}, e)$, $(\frac{3}{4}\pi, e)$ //

(2)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
$f'(x)$	$\sqrt{2}$	↗	e	↘	$-e$	↗	$\sqrt{2}$



$\therefore$ $a > e$, $a < -e$ のとき 0個

$a = e$, $a = -e$, のとき 1個

$-e < a < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < a < e$ のとき 2個

$a = \sqrt{2}$ のとき 3個 //