

数理  
石井K

2015年人文学部第3問

3 関数  $f(x) = |x-2|^3 - 3x^2 + 12x$  がある。以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  の増減を調べ、グラフの概形を描け。
  - (2) 曲線  $y = f(x)$  と直線  $y = 12$  の共有点の  $x$  座標を求めよ。
  - (3) 曲線  $y = f(x)$  と直線  $y = 12$  で囲まれた図形の面積を求めよ。
- [補足説明] 必要ならば、自然数  $n$  に対して

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となることを用いてよい。

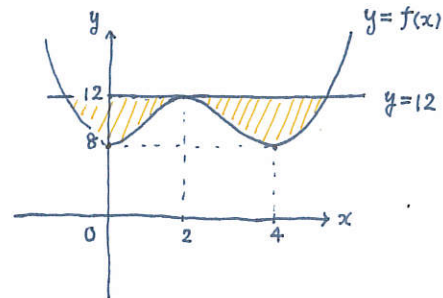
(1)  $x \geq 2$  のとき  $f(x) = (x-2)^3 - 3x^2 + 12x$   
 $= x^3 - 9x^2 + 24x - 8$   
 $\therefore f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$   
 $= 3(x-2)(x-4)$

$\therefore f'(x) = 0$  となるのは、 $x = 2, 4$

$x < 2$  のとき、 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 8$   
 $\therefore f'(x) = -3x^2 + 6x$   
 $= -3x(x-2)$

$\therefore f'(x) = 0$  となるのは  $x = 0$

$x$	...	0	...	2	...	4	...
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f'(x)$	↓	8	↑	12	↓	8	↑



(2)  $x \geq 2$  のとき、 $x^3 - 9x^2 + 24x - 8 = 12$   
 $\therefore x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$   
 $\therefore (x-2)^2(x-5) = 0 \quad \therefore x = 2, 5$

$x < 2$  のとき、 $-x^3 + 3x^2 + 8 = 12$   
 $\therefore -x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$\therefore (x-2)^2(x+1) = 0 \quad \therefore x = -1$

以上より、 $x = -1, 2, 5$

$$\begin{array}{r} x-5 \\ x^2-4x+4 \overline{) x^3-9x^2+24x-20} \\ \underline{x^3-4x^2+4x} \phantom{-20} \\ -5x^2+20x-20 \\ \underline{-5x^2+20x-20} \\ 0 \end{array}$$

$x=2$  で接するときは  
 注目すれば割り算  
 しなくてもできる。

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-4x+4 \overline{) x^3-3x^2+4} \\ \underline{x^3-4x^2+4x} \phantom{+4} \\ x^2-4x+4 \\ \underline{x^2-4x+4} \\ 0 \end{array}$$

(3)  $S = \int_{-1}^2 (x-2)^2(x+1) dx + \int_2^5 -(x-2)^2(x-5) dx$   
 $= \frac{34}{12} + \frac{34}{12}$   
 $= \frac{27}{2}$

↓ 補足説明通りやるなら  
 展開した形で積分する。