



2016年医学部第1問

1 平面上の  $\triangle ABC$  と点  $O$  を考える.  $m, n$  は正の実数とする.

(1) 辺  $AB$  を  $m:n$  に内分する点を  $M$  とする. このとき  $|\overrightarrow{AB}|^2, |\overrightarrow{OM}|^2$  を  $|\overrightarrow{OA}|^2, |\overrightarrow{OB}|^2$  と内積  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  で表せ. さらに

$$\frac{mn}{m+n} |\overrightarrow{AB}|^2 + (m+n) |\overrightarrow{OM}|^2 = n |\overrightarrow{OA}|^2 + m |\overrightarrow{OB}|^2$$

を示せ.

(2) 辺  $AB$  を  $m:n$  に内分する点を  $M_1$ , 辺  $BC$  を  $m:n$  に内分する点を  $M_2$ , 辺  $CA$  を  $m:n$  に内分する点を  $M_3$  とする. このとき  $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2$  は

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \left( |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 \right) + |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2$$

に等しいことを示せ.

(3) (2) の  $m, n$  を変化させたとき

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OM_1}|^2 - |\overrightarrow{OM_2}|^2 - |\overrightarrow{OM_3}|^2$$

の最大値を  $|\overrightarrow{AB}|^2, |\overrightarrow{BC}|^2, |\overrightarrow{CA}|^2$  で表せ.