九州工業大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 放物線 $C: y = ax^2 + bx + c \ (a > 0)$ を考える．2本の直線

$\ell_1 : y = \dfrac{5}{2}x$ および $\ell_2 : y = -\dfrac{1}{2}x$

は C に接するものとする．C と ℓ_1 の接点をP，C と ℓ_2 の接点をQとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha, \beta, \gamma \ (\alpha \neq 0)$ を定数とするとき，2次方程式 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ が重解を持つための条件を求めよ．

(2) b の値を求めよ．また，c を a を用いて表せ．

(3) P，Qの x 座標を a を用いて表せ．

(4) a の値にかかわらず C の頂点は直線 m 上にある．m の方程式を求めよ．

(5) C と ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

(1) 判別式 $D = 0$ $\therefore D = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ $\therefore \underline{\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0}$ //

(2) $ax^2 + bx + c - \frac{5}{2}x = 0$ が重解をもつ $\therefore$ (1)より．$(b - \frac{5}{2})^2 - 4ac = 0 \cdots ①$

$ax^2 + bx + c + \frac{1}{2}x = 0$ 〃 $\therefore (b + \frac{1}{2})^2 - 4ac = 0 \cdots ②$

① − ② より．$\underline{b = 1}$ // このとき ①より．$\underline{c = \dfrac{9}{16a}}$ //

(3) (2)より．

$ax^2 + x + \frac{9}{16a} - \frac{5}{2}x = 0$ 軸は．$x = -\dfrac{-\frac{3}{2}}{2a} = \dfrac{3}{4a}$ $\therefore$ $\underline{\text{P の } x \text{ 座標は } \dfrac{3}{4a}}$ //

$ax^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16a} = 0$ 軸は $x = -\dfrac{\frac{3}{2}}{2a} = -\dfrac{3}{4a}$ $\therefore$ $\underline{\text{Q の } x \text{ 座標は } -\dfrac{3}{4a}}$ //

(4) $y = ax^2 + x + \frac{9}{16a}$ $\therefore y = a\left(x + \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} + \frac{9}{16a}$

$\therefore$ 頂点を (X, Y) とおくと．$X = -\dfrac{1}{2a}$，$Y = \dfrac{5}{16a}$ $\therefore Y = -\dfrac{5}{8}X$

$\therefore \underline{m : y = -\dfrac{5}{8}x}$ //

(5) $S = \displaystyle\int_{-\frac{3}{4a}}^{0} ax^2 + x + \frac{9}{16a} + \frac{1}{2}x\,dx + \int_{0}^{\frac{3}{4a}} ax^2 + x + \frac{9}{16a} - \frac{5}{2}x\,dx$

$= \left[\dfrac{ax^3}{3} + \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{9x}{16a}\right]_{-\frac{3}{4a}}^{0} + \left[\dfrac{ax^3}{3} - \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{9x}{16a}\right]_{0}^{\frac{3}{4a}}$

$= \underline{\dfrac{9}{32a^2}}$ //