三重大学

2010年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ X を2次の正方行列として以下の問いに答えよ．

(1) p，q を実数とし $q \neq 0$ とする．$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$ ならば，X は $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の形に表せることを示せ．

(2) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ のとき，自然数 n に対し $X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ となることを数学的帰納法により示せ．ただし $a^0 = 1$ とする．

(3) m，n を自然数とする．X の各成分は0以上の整数で，さらに $X^{n+1} - X^n = \begin{pmatrix} 2^{m+1} & 2^{50} \\ 0 & 2^{m+1} \end{pmatrix}$ を満たすものとする．このような行列 X が存在するような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．