2016年 医学部 第2問

$\boxed{2}$ $0 \leqq x \leqq 2$とする.

(1) $\sin \pi x + \cos 2\pi x > 0$を満たす$x$の範囲を求めよ.

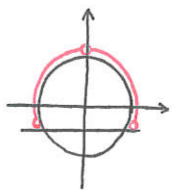
(2) (1)で求めた$x$の範囲に対し,

$$\log_2(3+x) + \log_2(5-x) = \log_2(16-k)$$

の解がひとつだけであるような実数$k$の範囲を求めよ.

(1) $\sin \pi x + \cos 2\pi x = \sin \pi x + 1 - 2\sin^2 \pi x$

$= -(2\sin \pi x + 1)(\sin \pi x - 1)$



∴ 不等式は, $(2\sin \pi x + 1)(\sin \pi x - 1) < 0$

∴ $-\frac{1}{2} < \sin \pi x < 1$

ここで, $0 \leqq \pi x \leqq 2\pi$ より, $0 \leqq \pi x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \pi x < \frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi < \pi x \leqq 2\pi$

∴ $\underline{0 \leqq x < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < x < \frac{7}{6},\ \frac{11}{6} < x \leqq 2}$ //

(2) 真数条件より, $3+x>0$ かつ $5-x>0$ かつ $16-k>0$

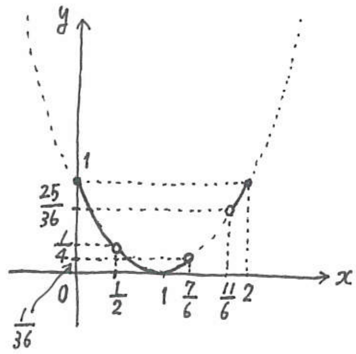
よって(1)で求めた$x$の範囲とあわせて, $0 \leqq x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{6}$, $\frac{11}{6} < x \leqq 2$, $k < 16$ … (*)

このとき,

$\log_2(3+x)(5-x) = \log_2(16-k)$

∴ $-x^2+2x+15 = 16-k$

∴ $(x-1)^2 = k$




(*)をみたす $y=(x-1)^2$ のグラフは右のようになる.

よって, これと $y=k$ の交点の個数が1個となるのは,

$\underline{k=0,\ \frac{1}{36} \leqq k < \frac{1}{4},\ \frac{1}{4} < k \leqq \frac{25}{36}}$ //