三重大学

2015年 医学部 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 119, \quad a_{n+1} - a_n = 12n - 61 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} = -\frac{1}{2}n(n-2c+1) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．ここで c は $5 < c < 6$ を満たす定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n, b_n を求めよ．

(2) $a_n b_n > 0$ となる n をすべて求めよ．

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ が最大になる n を求めよ．

(1) 階差数列の公式より，$n \geqq 2$ に対して

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 12k - 61$$

$$\therefore a_n = 119 + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot n(n-1) - 61(n-1)$$

$$= 6n^2 - 67n + 180$$

これは $n=1$ のときも成り立つ　$\therefore$ $\underline{a_n = 6n^2 - 67n + 180}$ //

$n \geqq 2$ のとき，$\displaystyle \frac{1}{b_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k}$

$$\therefore \frac{1}{b_n} = -\frac{1}{2}n(n-2c+1) - \left\{-\frac{1}{2}(n-1)(n-2c)\right\}$$

$$= c - n$$

$\displaystyle \frac{1}{b_1} = -\frac{1}{2}(2-2c) = c - n$ なので，$n=1$ のときも成り立つ

$\therefore$ $\underline{b_n = \dfrac{1}{c-n}}$ //

(2) (1)より，$a_n = (2n-9)(3n-20)$　$\therefore$ $a_n < 0$ となるのは，$\dfrac{9}{2} < n < \dfrac{20}{3}$　$\therefore$ $n = 5, 6$

$b_n < 0$ となるのは，(2)より，$c - n < 0$　$\therefore$ $n > c$　ここで $5 < c < 6$ より，$n = 6, 7, 8, \cdots$

$\therefore$ $a_n < 0$ かつ $b_n < 0$ となるのは，$n = 6$

同様に，$a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ となるのは，$n = 1, 2, 3, 4$

以上より，$\underline{n = 1, 2, 3, 4, 6}$ //

2枚目につづく

2015年 医学部 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

4 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 119, \quad a_{n+1} - a_n = 12n - 61 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} = -\frac{1}{2}n(n - 2c + 1) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．ここで c は $5 < c < 6$ を満たす定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n，b_n を求めよ．

(2) $a_nb_n > 0$ となる n をすべて求めよ．

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_kb_k$ が最大になる n を求めよ．

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ が最大 $\Rightarrow$ $a_n b_n > 0$

$a_n b_n < 0$ となるときは，これを足さない方が大きい

また，(2)の議論より，すべての自然数 n について，$a_n b_n \neq 0$ となる

∴ 最大値の候補は $\sum_{k=1}^{4} a_k b_k$ と $\sum_{k=1}^{6} a_k b_k$ （∵ (2)より）

$$\sum_{k=1}^{6} a_k b_k - \sum_{k=1}^{4} a_k b_k = a_5 b_5 + a_6 b_6$$
$$= \frac{-5}{c-5} + \frac{-6}{c-6}$$
$$= \frac{11c - 60}{(c-5)(6-c)}$$

(分母) > 0 より，
$$\begin{cases} 5 < c < \dfrac{60}{11} \text{ のとき} & \sum_{k=1}^{6} a_k b_k < \sum_{k=1}^{4} a_k b_k \\ c = \dfrac{60}{11} \text{ のとき，} & \sum_{k=1}^{6} a_k b_k = \sum_{k=1}^{4} a_k b_k \\ \dfrac{60}{11} < c < 6 \text{ のとき，} & \sum_{k=1}^{6} a_k b_k > \sum_{k=1}^{4} a_k b_k \end{cases}$$

よって，
$$\begin{cases} 5 < c < \dfrac{60}{11} \text{ のとき，} & n = 4 \\ c = \dfrac{60}{11} \text{ のとき，} & n = 4, 6 \\ \dfrac{60}{11} < c < 6 \text{ のとき，} & n = 6 \end{cases}$$ ——//