

2015年学芸(英文)第2問

 数理
石井K

2 直線 $y = x$ 上の点 (a, a) から放物線 $y = x^2 + 1$ に2つの接線を引き、その接点を A, B とおく。直線 AB の方程式を a で表せ。

$$y = x^2 + 1 \text{ より } y' = 2x$$

接点を $(t, t^2 + 1)$ とおくと接線は

$$y = 2t(x - t) + t^2 + 1$$

すなわち、 $y = 2tx - t^2 + 1$

これが (a, a) を通るので

$$a = 2ta - t^2 + 1 \iff t^2 - 2at + a - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$A(\alpha, \alpha^2 + 1), B(\beta, \beta^2 + 1)$ とおくと、 α, β は $\textcircled{1}$ の実数解で

あり、 $\textcircled{1}$ は常に異なる2つの実数解をもつので

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2a \\ \alpha\beta = a - 1 \end{cases}$$

直線 AB : $y = \frac{\alpha^2 + 1 - (\beta^2 + 1)}{\alpha - \beta} (x - \alpha) + \alpha^2 + 1$

$$\iff y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta + 1$$

$$\iff \underline{y = 2ax - a + 2} //$$