0001498181058999

南山大学

2013年 情報理工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{1+e^x},\quad g(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

とする.

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) すべての x について $g(-x)=g(x)$ が成り立つことを示せ.

(3) a を正の定数とする.このとき,次の2つの定積分を求めよ.

$$\int_{-a}^{a} xg(x)\,dx,\quad \int_{-a}^{a} |x|g(x)\,dx$$

(1) $f'(x)=\dfrac{-1\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\underline{-\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}}$ //

(2) $g(-x)=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

$=g(x)$ ■

分子・分母に e^{2x} をかけた

ポイント

$\int_{-a}^{a}(\text{奇関数})\,dx=0$

$\int_{-a}^{a}(\text{偶関数})\,dx=2\int_{0}^{a}(\text{偶関数})\,dx$

(3) $h(x)=xg(x)$ とおくと.

$h(-x)=-x\cdot g(-x)\overset{(2)より}{=}-xg(x)=-h(x)$ $\therefore h(x)$ は奇関数.

$\therefore \int_{-a}^{a} xg(x)\,dx=\underline{0}$ //

$p(x)=|x|g(x)$ とおくと.

$p(-x)=|-x|g(-x)\overset{(2)より}{=}|x|g(x)=p(x)$ $\therefore p(x)$ は偶関数

$\therefore \int_{-a}^{a}|x|g(x)\,dx=2\int_{0}^{a}|x|g(x)\,dx$

$0\leqq x\leqq a$ では $|x|=x$

(1)より, $f'(x)=-g(x)$ なので

$=2\int_{0}^{a}-xf'(x)\,dx$

$=2\left[-xf(x)\right]_0^a+2\int_0^a f(x)\,dx$

$=-2af(a)+2\int_0^a 1-\dfrac{e^x}{1+e^x}\,dx$

$=-\dfrac{2a}{1+e^a}+2\left[x-\log(1+e^x)\right]_0^a$

$=-\dfrac{2a}{1+e^a}+2a-2\log(1+e^a)+2\log 2$

$=\underline{\dfrac{2ae^a}{1+e^a}+2\log\dfrac{2}{1+e^a}}$ //