0001996363008999

玉川大学

2014年 全学部 第3問

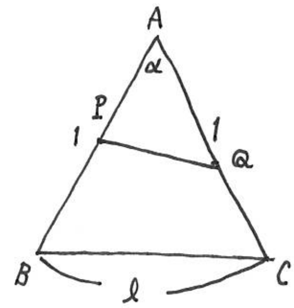
数理 石井K

$\boxed{3}$ 三角形ABCにおいて，AB = 1，AC = 1，BC = lとする．AB，AC上にそれぞれ点P，Qをとり線分PQが三角形ABCの面積を二等分するように引く．次の問いに答えよ．

(1) 線分APとAQの長さの積AP・AQを求めよ．

(2) ∠Aの大きさをαとするとき，$\cos\alpha$をlを用いて表せ．

(3) 線分PQの長さが最小となる線分APおよび線分AQの長さを求めよ．また，そのときの線分PQの長さをlで表せ．



(1) △ABCの面積をSとおくと．

$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\angle A \quad \therefore S = \frac{1}{2}\sin\angle A \cdots ①$

また，△APQを考えると．

$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}AP\cdot AQ\cdot \sin\angle A \quad \therefore S = AP\cdot AQ\cdot\sin\angle A \cdots ②$

①，②より．$\underline{AP\cdot AQ = \frac{1}{2}}$ //

(2) △ABCにおいて余弦定理より．

$l^2 = 1+1-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\alpha \quad \therefore \underline{\cos\alpha = \frac{2-l^2}{2}}$ //

(3) △APQにおいて余弦定理より

$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP\cdot AQ\cdot\cos\alpha$

$= AP^2 + AQ^2 - \frac{2-l^2}{2}$ （∵(1)，(2)より）

$\geqq 2\sqrt{AP^2\cdot AQ^2} - 1 + \frac{1}{2}l^2$ （∵$AP^2>0$，$AQ^2>0$より相加・相乗平均の関係）

$= \frac{1}{2}l^2$

∴ PQが最小となるのは．$AP^2 = AQ^2$ すなわち $\underline{AP = AQ = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき．}}$ //

このとき．$\underline{PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}l}$ //