

2014年 経済・地域政策 第3問


 数理
石井K

3 放物線 $y = 2x^2 + px + q$ 上の点 $(1, -1)$ における接線が原点を通るとき、以下の各問に答えよ。

- (1) 定数 p, q の値を求めよ。
 (2) 原点からこの放物線に引いた接線の方程式をすべて求めよ。
 (3) この放物線と(2)の接線で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) 放物線が $(1, -1)$ を通ることより、 $-1 = 2 + p + q \quad \therefore p + q = -3 \dots \textcircled{1}$

また、 $y' = 4x + p$ より 接線は $y = (p+4)(x-1) - 1$

これが原点を通ることより、 $0 = -p - 4 - 1 \quad \therefore p = -5$

$\textcircled{1}$ に代入して $q = 2 \quad \therefore p = -5, q = 2$

(2) 接点を $(t, 2t^2 - 5t + 2)$ とおくと 接線は

$$y = (4t - 5)(x - t) + 2t^2 - 5t + 2 \text{ と表される}$$

原点を通ることから、 $0 = -t(4t - 5) + 2t^2 - 5t + 2$

$$\therefore -2t^2 + 2 = 0 \quad \therefore t = \pm 1$$

このとき 接線は、 $y = -x, y = -9x$

(3) $S = \int_{-1}^0 2x^2 - 5x + 2 + 9x \, dx + \int_0^1 2x^2 - 5x + 2 + x \, dx$

$$= \int_{-1}^0 2(x+1)^2 \, dx + \int_0^1 2(x-1)^2 \, dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^0 + 2 \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_0^1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

