名城大学

2015年 理工学部 第1問

数理 石#K

$\boxed{1}$ 次の問について，答えを $\boxed{}$ 内に記入せよ．

(1) 点 $P(x,\ y)$ が原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上を動くとき，$\sqrt{3}x+y$ の最小値は $\boxed{ア}$ であり，$x^2+2xy+3y^2$ の最大値は $\boxed{イ}$ である．

$-2\sqrt{2}$　　$2\sqrt{2}+4$

(2) 放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $A(a,\ a^2)$，$B(-4,\ 16)$，$C(2,\ 4)$ がある．$a>0$ かつ $AB=AC$ であるとき，$a=\boxed{ウ}$ であり，$\triangle ABC$ の面積は $\boxed{エ}$ である．

$\frac{7}{2}$　　$\frac{135}{4}$

(1) $x=\sqrt{2}\cos\theta$，$y=\sqrt{2}\sin\theta$ と表せるので（$0\leqq\theta<2\pi$ とする）

$$\sqrt{3}x+y=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$$
$$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$ より

$\therefore$ $\underline{\sqrt{3}x+y \text{ の最小値は } -2\sqrt{2}}$ //

$$x^2+2xy+3y^2=2\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+6\sin^2\theta$$
$$=2\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+2\sin2\theta+6\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$$
$$=2\sin2\theta-2\cos2\theta+4$$
$$=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+4$$

$-\frac{\pi}{4}\leqq2\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{15}{4}\pi$ より

$\therefore$ $\underline{x^2+2xy+3y^2 \text{ の最大値は } 2\sqrt{2}+4}$ //

(2) $AB^2=AC^2$ となるので，$(a+4)^2+(a^2-16)^2=(a-2)^2+(a^2-4)^2$

$$\therefore\ 12a+12-24a^2+240=0$$
$$\therefore\ (2a-7)(a+3)=0$$

$a>0$ より $\underline{a=\frac{7}{2}}$ //

$\therefore A\left(\frac{7}{2},\frac{49}{4}\right)$，$B(-4,16)$，$C(2,4)$　ここで点 C が原点に移るように 3点を平行移動すると，

$A'\left(\frac{3}{2},\frac{33}{4}\right)$，$B'(-6,12)$，$C'(0,0)$

$$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}\times12-(-6)\times\frac{33}{4}\right|=\underline{\frac{135}{4}}$$ //