2013年 歯・薬学部（中期） 第4問

4 xy 平面上に3点 A$(-3,\ 0)$，B$(0,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ $(c>0)$ がある．

(1) PA : PB ＝ 2 : 1 となる点Pは，点(ア 1 , イ 0)を中心とする半径 ウ 2 の円を描く．

(2) PA : PB : PC ＝ 4 : 2 : 1 となるような点Pが存在するのは $\dfrac{\boxed{エ}\ 3}{\boxed{オ}\ 2} \leqq c \leqq \dfrac{\boxed{カ}\ 9}{\boxed{キ}\ 2}$ のときである．

(1) P(x, y) とおくと．

PA : PB = 2 : 1 より．PA = 2PB　∴ $PA^2 = 4PB^2$

$\therefore (x+3)^2 + (y-0)^2 = 4(x^2+y^2)$

$\therefore 3x^2 - 6x - 9 + 3y^2 = 0$

$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 2^2$　∴ $\underline{(1, 0)\text{を中心とする半径 }2\text{の円}}$ //

(2) PA : PB = 4 : 2 = 2 : 1 となるので，P が(1)で求めた円上にあることが必要条件となる．

PB : PC = 2 : 1 より．$PB^2 = 4PC^2$

$\therefore x^2 + y^2 = 4\{(x-c)^2 + y^2\}$

$\therefore 3x^2 - 8cx + 4c^2 + 3y^2 = 0$

$\therefore \left(x - \frac{4}{3}c\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}c^2$

∴ 中心 $\left(\frac{4}{3}c,\ 0\right)$，半径 $\frac{2}{3}c$ の円

∴ (1)で求めた円とこの円が交点をもてばよいので，

$$\left|\frac{2}{3}c - 2\right| \leqq \left|\frac{4}{3}c - 1\right| \leqq \frac{2}{3}c + 2$$

$\therefore \frac{4}{9}c^2 - \frac{8}{3}c + 4 \leqq \frac{16}{9}c^2 - \frac{8}{3}c + 1$ かつ $\frac{16}{9}c^2 - \frac{8}{3}c + 1 \leqq \frac{4}{9}c^2 + \frac{8}{3}c + 4$

$\therefore \frac{4}{3}c^2 \geqq 3$ かつ $\frac{4}{3}c^2 - \frac{16}{3}c - 3 \leqq 0$

$\therefore c^2 \geqq \frac{9}{4}$ かつ $4c^2 - 16c - 9 \leqq 0$

∴ $c>0$ より，$c \geqq \frac{3}{2}$ かつ $(2c+1)(2c-9) \leqq 0$

$\therefore \underline{\frac{3}{2} \leqq c \leqq \frac{9}{2}}$ //