

2012年理系第4問

4  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で関数

$$f(x) = x + 1 - \cos x + \sqrt{3} \sin x$$

を考える。

- (1)  $f(x)$  の極値を求め、 $y = f(x)$  のグラフを描きなさい。  
 (2) 曲線  $y = f(x)$ ,  $x$  軸, 直線  $x = 2\pi$  で囲まれた部分の面積を求めなさい。

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= 1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x \\ &= 2 \left( \sin x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 \\ &= 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = 0 \text{ となるのは } \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{ より } \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7}{3}\pi \text{ であるから}$$

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは } x = \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

$\therefore$  右の増減表より。

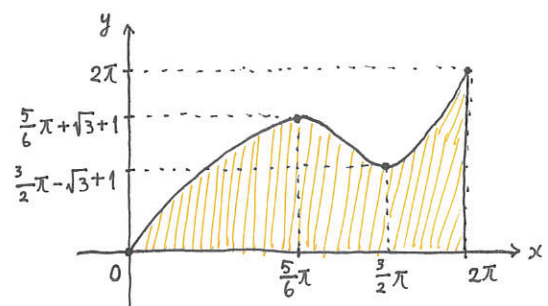
$$\text{極大値は } f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi + \sqrt{3} + 1, \text{ 極小値は}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi - \sqrt{3} + 1$$

グラフは右のようになる。

$x$	0	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$2\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$2\pi$

極大      極小



(2) (1) のグラフより。

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} + x - \sin x - \sqrt{3} \cos x \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi^2 + 2\pi - \sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= \underline{\underline{2\pi^2 + 2\pi}} \end{aligned}$$