0001850819418999

宮崎大学

2014年 医学部 第4問

数理 石井K

4 2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が，$a_1=1$，$b_1=1$ および

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+6b_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \text{①} \\ b_{n+1}=2a_n+3b_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \text{②} \end{cases}$$

で定められているとき，次の各問に答えよ．

(1) $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ③ を満たす定数 α，β の組を2組求めよ．

(2) a_n を，n を用いて表せ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ を求めよ．

$a_2=2a_1+6b_1=8$

$b_2=2a_1+3b_1=5$

(1) $\dfrac{a_{n+2}-2a_{n+1}}{6}=2a_n+3\cdot\dfrac{a_{n+1}-2a_n}{6}$ （②に①を代入した）

$\therefore a_{n+2}-2a_{n+1}=12a_n+3a_{n+1}-6a_n$

$\therefore a_{n+2}-5a_{n+1}-6a_n=0$

一方③を展開して移項すると，$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

$\therefore \alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=-6$ 　これより，$(\alpha,\beta)=(6,-1),\ (-1,6)$ //

(2) (1)より，

$a_{n+2}-6a_{n+1}=-(a_{n+1}-6a_n)$ 　$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}-6a_n\}$ は初項 $a_2-6a_1=2$，公比 -1 の等比数列

$\therefore a_{n+1}-6a_n=2\cdot(-1)^{n-1}$ ④

$a_{n+2}+a_{n+1}=6(a_{n+1}+a_n)$ 　$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は初項 $a_2+a_1=9$，公比 6 の等比数列

$\therefore a_{n+1}+a_n=9\cdot6^{n-1}$ ⑤

④－⑤より，$-7a_n=2\cdot(-1)^{n-1}-9\cdot6^{n-1}$

$\therefore a_n=\dfrac{9\cdot6^{n-1}-2\cdot(-1)^{n-1}}{7}$ //

(3) (2)と①より $6b_n=\dfrac{9\cdot6^n-2\cdot(-1)^n-18\cdot6^{n-1}+4\cdot(-1)^{n-1}}{7}=\dfrac{6^{n+1}-6\cdot(-1)^n}{7}$

$\therefore b_n=\dfrac{6^n-(-1)^n}{7}$

(3)のつづき

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{9\cdot6^{n-1}-2(-1)^{n-1}}{6^n-(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{2}+2\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n}$

$=\dfrac{3}{2}$ //