



2015年 第4問

1枚目 / 2枚

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。
 (2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad a_{n+1} - a_n &= \int_0^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx - \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx \\ &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx \end{aligned}$$

$n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ において $e^{-x} \sin x$ は常に0以上または常に0以下なので

$$a_{n+1} - a_n = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \right| \quad \dots (*)$$

$$I = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (-e^{-x})' \sin x dx \\ &= \left[-e^{-x} \sin x \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^{-x})' \cos x dx \\ &= - \left[e^{-x} \cos x \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} -e^{-x} \sin x dx \\ &= -e^{-(n+1)\pi} \cos(n+1)\pi + e^{-n\pi} \cos n\pi - I \end{aligned}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} \left\{ -e^{-(n+1)\pi} \cos(n+1)\pi + e^{-n\pi} \cos n\pi \right\}$$

$$\text{よって } (*) \text{ より, } \underline{a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \{ e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi} \}}$$

$$(2) \quad J = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx \text{ とおくと.}$$

$$J = \int_0^{\pi} (-e^{-x})' \sin x dx$$

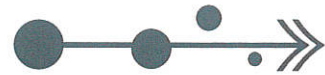
$$= \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (e^{-x})' \cos x dx$$

$$= - \left[e^{-x} \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} -e^{-x} \sin x dx$$

$$= e^{-\pi} + 1 - J$$

$$\therefore J = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1)$$

$$\text{すなわち } a_1 = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1)$$



2015 年 第 4 問

2 枚 目 / 2 枚

数 理
石 井 K4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。
 (2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(2) の つづ き。

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \{ e^{-(k+1)\pi} + e^{-k\pi} \} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1) + \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} e^{-(k+1)\pi}}_{\substack{\text{初項 } e^{-2\pi}, \text{ 公比 } e^{-\pi} \\ \text{の等比数列の和}}} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k\pi} \right\}$$

初項 $e^{-\pi}$, 公比 $e^{-\pi}$
の等比数列の和

$$= \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{-2\pi}(1 - e^{-(n-1)\pi})}{1 - e^{-\pi}} + \frac{e^{-\pi}(1 - e^{-(n-1)\pi})}{1 - e^{-\pi}} \right\}$$

$$= \frac{(1 + e^{-\pi})(1 - e^{-n\pi})}{2(1 - e^{-\pi})}$$

これは $n=1$ のときも成り立っている

(3) $0 < e^{-\pi} < 1$ より。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + e^{-\pi}) \{ 1 - (e^{-\pi})^n \}}{2(1 - e^{-\pi})}$$

$$= \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})}$$

$$= \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}$$