0001819630818999

名城大学

数理 石井K

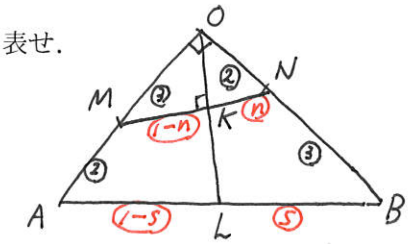
2014年 理工学部 第3問

3 △OABは∠AOBが直角な二等辺三角形とする．辺OAを3：2，辺OBを2：3に内分する点をそれぞれM，Nとし，辺AB上の点Lが$\overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{MN}$を満たすとする．$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$とおくとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{OL}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) 線分OLと線分MNの交点をKとするとき，$\overrightarrow{OK}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) $|\vec{a}| = 5$のとき，$|\overrightarrow{OK}|$を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{2}{5}\vec{b}$ より

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$

$= -\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{OL} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$ $(0 \leqq s \leqq 1)$ とおくと

$\overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ より $OA = OB = k$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ とおく

$\overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{MN} = -\frac{3}{5}s|\vec{a}|^2 + \frac{2}{5}s\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{3}{5}(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{2}{5}(1-s)|\vec{b}|^2$

$= -\frac{3}{5}sk^2 + \frac{2}{5}(1-s)k^2$

$\therefore \frac{2}{5}k^2 - sk^2 = 0$ $\quad \therefore k^2\left(\frac{2}{5} - s\right) = 0$ $\quad k > 0$ より $s = \frac{2}{5}$

$\underline{\overrightarrow{OL} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}}$ //

(2) $\overrightarrow{OK} = t\overrightarrow{OL}$ とおくと $\overrightarrow{OK} = \frac{2}{5}t\vec{a} + \frac{3}{5}t\vec{b}$ …①

また，$\overrightarrow{OK} = n\overrightarrow{OM} + (1-n)\overrightarrow{ON}$ と表せるから $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{5}n\vec{a} + \frac{2}{5}(1-n)\vec{b}$ …②

①，②より，$2t = 3n$，$3t = 2 - 2n$ $\quad \therefore t = \frac{6}{13}$ $\quad \therefore \underline{\overrightarrow{OK} = \frac{12}{65}\vec{a} + \frac{18}{65}\vec{b}}$ //

(3) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$

$|\overrightarrow{OK}|^2 = \left(\frac{12}{65}\right)^2 \cdot 25 + \frac{12 \cdot 18}{65^2} \times 2 \cdot \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0} + \left(\frac{18}{65}\right)^2 \cdot 25$

$= \frac{12^2}{13^2} + \frac{18^2}{13^2}$

$= \frac{36}{169}(4+9)$

$= \frac{36}{13}$

$\therefore |\overrightarrow{OK}| = \underline{\frac{6\sqrt{13}}{13}}$ //