2015年 第4問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ．

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(1) $a_{n+1} - a_n = \int_0^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx - \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$

$= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$

$n\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi$ において $e^{-x}\sin x$ は常に0以上または常に0以下なので

$a_{n+1} - a_n = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx\right| \quad \cdots (*)$

$I = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ とおくと，

$I = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (-e^{-x})'\sin x\,dx$

$= \left[-e^{-x}\sin x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^{-x})'\cos x\,dx$

$= -\left[e^{-x}\cos x\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} -e^{-x}\sin x\,dx$

$= -e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi + e^{-n\pi}\cos n\pi - I$

$\therefore I = \frac{1}{2}\left\{-e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi + e^{-n\pi}\cos n\pi\right\}$

よって (*) より， $\underline{a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left\{e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi}\right\}}$ //

(2) $J = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ とおくと，

$J = \int_0^{\pi} (-e^{-x})'\sin x\,dx$

$= \left[-e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (e^{-x})'\cos x\,dx$

$= -\left[e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} -e^{-x}\sin x\,dx$

$= e^{-\pi} + 1 - J$

$\therefore J = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$

すなわち $a_1 = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$

2015年 第4問　2枚目 / 2枚

数理 石井K

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ．

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(2) のつづき．

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left\{e^{-(k+1)\pi} + e^{-k\pi}\right\} \quad (n \geqq 2)$$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1) + \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} e^{-(k+1)\pi} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k\pi}\right\}$$

初項 $e^{-2\pi}$，公比 $e^{-\pi}$ の等比数列の和　　初項 $e^{-\pi}$，公比 $e^{-\pi}$ の等比数列の和

$$= \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1) + \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{-2\pi}(1-e^{-(n-1)\pi})}{1-e^{-\pi}} + \frac{e^{-\pi}(1-e^{-(n-1)\pi})}{1-e^{-\pi}}\right\}$$

$$= \underline{\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}}\ //$$

これは $n=1$ のときも成り立っている

(3) $0 < e^{-\pi} < 1$ より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+e^{-\pi})\{1-(e^{-\pi})^n\}}{2(1-e^{-\pi})}$$

$$= \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$$

$$= \underline{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}\ //$$