名城大学

2015年 薬学部 第3問

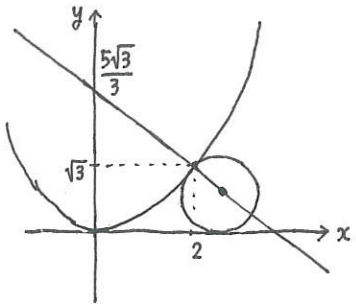
数理 石井K

3 放物線 $C : y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ 上の点 $P(2,\ \sqrt{3})$ における接線を ℓ とする．第1象限に中心をもつ円 O が x 軸に接し，かつ点Pで直線 ℓ に接するとき，次の各問に答えよ．

(1) 点Pを通り，直線 ℓ に直交する直線の方程式を求めよ．

(2) 円 O の中心の座標と半径を求めよ．

(3) 円 O の外部において，放物線 C，円 O および x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ．



(1) $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ より，ℓ の傾きは $\sqrt{3}$

$\therefore$ ℓ に直交する直線の傾きは $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ で Pを通るから，

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)+\sqrt{3}$　すなわち，$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{3}$ //

(2) 円Oの中心を (a,b) とおくと，$(a>0,\ b>0)$

x 軸に接することから，半径は b

(a,b) は(1)で求めた直線上にあるから，$b = -\frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{5\sqrt{3}}{3}$ …①

また，$\ell : y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \iff \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$

点と直線のキョリ公式より，

$b = \frac{|\sqrt{3}a - b - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}$　$\therefore$ $2b = |\sqrt{3}a - b - \sqrt{3}|$ …②

②に①を代入して，$-a+5 = 2|a-2|$

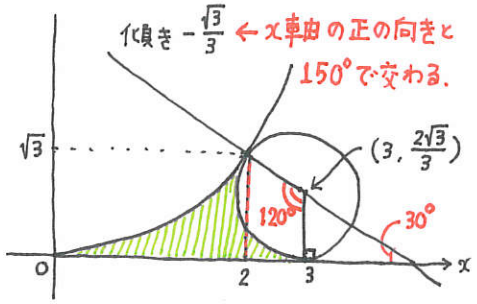
(i) $a \geqq 2$ のとき．

$-a+5 = 2a-4$　$\therefore$ $a=3$，①より，$b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(ii) $0<a<2$ のとき．

$-a+5 = -2a+4$　$\therefore$ $a=-1$　$a>0$ なので不適

(i)，(ii)より 中心 $(3,\ \frac{2\sqrt{3}}{3})$，半径 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ //



(3) 右の図より，

$S = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}x^2\,dx + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cdot 1}_{\text{台形}} - \underbrace{\pi\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}}_{\text{おうぎ形}}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{9}\pi$ //