



2010年 総合理工 (数理・情報システム) 第2問

2 自然数  $n$  に対して, ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を

$$\vec{a} = \left( n^{\frac{1}{4}}, n^{\frac{1}{4}} + 1 \right), \quad \vec{b} = \left( n^{\frac{1}{4}}, 1 - n^{\frac{1}{4}} \right)$$

で定めるとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とするとき,  $\cos \theta$  を  $n$  を用いて表せ.
- (2)  $\frac{1}{\cos \theta}$  が整数となるような  $n$  を小さい順に  $n_1, n_2, \dots$  とするとき,  $i$  番目の  $n_i$  を  $i$  を用いて表せ.
- (3)  $n = n_i$  に対する  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta_i$  とおく. 自然数  $k$  に対して,

$$S_k = \frac{1}{\tan^2 \theta_1} + \frac{1}{\tan^2 \theta_2} + \dots + \frac{1}{\tan^2 \theta_k}$$

とすると,  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$  を求めよ.