埼玉大学

2014年 理学部 第1問

数理 石井K

1 pを素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $1 \leqq r \leqq p-1$を満たす自然数rに対し，${}_p\mathrm{C}_r$はpで割り切れることを示せ．ただし，${}_p\mathrm{C}_r$はp個からr個とる組合せの総数を表すものとする．

(2) $1 \leqq s \leqq q-1$を満たす自然数の組$(q,\ s)$であって，${}_q\mathrm{C}_s$がqで割り切れないものを1組あげよ．

(3) 自然数$m,\ n$に対し，$(m+n)^p-(m^p+n^p)$がpで割り切れることを示せ．

(4) 自然数nに対し，n^p-nはpで割り切れることを，nに関する数学的帰納法を用いて証明せよ．

フェルマーの小定理という（よく出る！）

(1) ${}_pC_r = \dfrac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}{r!}$　ここで 分子は pの倍数であるが，

分母は $r \leqq p-1$ より pの倍数でない

また，${}_pC_r$ は pコからrコとる組合せの総数なので整数

$\therefore\ {}_pC_r = p \cdot \dfrac{(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}{r!}$ はpで割り切れる ■

これ以外でも例になっていればよい

(2) ${}_4C_2 = \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$ は4で割り切れない $\therefore\ (q,\ s) = \underline{(4,\ 2)}$ //

(3) 二項定理より．$(m+n)^p-(m^p+n^p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} m^k n^{p-k}\cdot {}_pC_k - (m^p+n^p)$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} m^k n^{p-k}\cdot {}_pC_k$$

この和の各項 $m^k n^{p-k}\cdot {}_pC_k$ $(1 \leqq k \leqq p-1)$ は (1)より．すべてpで割り切れる

$\therefore$ その和 $(m+n)^p-(m^p+n^p)$ もpで割り切れる ■

(4) (i) $n=1$のとき．$n^p-n=0$ となり pで割り切れる $\therefore$ 成り立つ

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定すると．k^p-k はpの倍数．

また．$\{(k+1)^p-(k+1)\} - \underbrace{(k^p-k)}_{p\text{の倍数}} = (k+1)^p-(k^p+1^p)$

(3)より．これはpの倍数となる．

$\therefore\ (k+1)^p-(k+1)$ はpの倍数となり $n=k+1$のときも成り立つ

(i)．(ii)より．n^p-n はpで割り切れる ■