



2014年 第3問

3  $xy$  平面の  $y \geq 0$  の部分にあり、 $x$  軸に接する円の列  $C_1, C_2, C_3, \dots$  を次のように定める.

- $C_1$  と  $C_2$  は半径 1 の円で、互いに外接する.
- 正の整数  $n$  に対し、 $C_{n+2}$  は  $C_n$  と  $C_{n+1}$  に外接し、 $C_n$  と  $C_{n+1}$  の弧および  $x$  軸で囲まれる部分にある.

円  $C_n$  の半径を  $r_n$  とする.

(1) 等式  $\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} + \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$  を示せ.

(2) すべての正の整数  $n$  に対して  $\frac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$  が成り立つように、 $n$  によらない定数  $\alpha, \beta, s, t$  の値を一組与えよ.

(3)  $n \rightarrow \infty$  のとき数列  $\left\{ \frac{r_n}{k^n} \right\}$  が正の値に収束するように実数  $k$  の値を定め、そのときの極限値を求めよ.