0001822457718999

佐賀大学

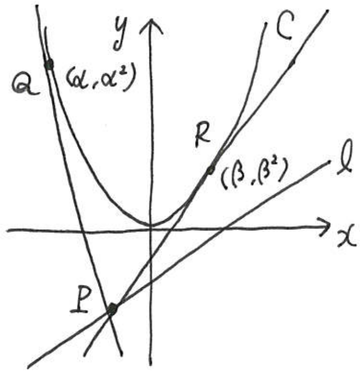
2014 年 農・文化教育学部 第 3 問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 放物線 $C: y = x^2$ と，それと共有点をもたない直線 $\ell: y = ax + b$ を考える．直線 ℓ 上の点 P から放物線 C に相異なる 2 本の接線を引き，その接点をそれぞれ Q，R とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 点 Q，R の座標をそれぞれ $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ とおく．点 P の x 座標を α，β で表せ．

(2) 直線 QR は点 P を ℓ 上どのようにとっても，定点を通ることを証明せよ．



(1) Q における C の接線は，$y' = 2x$ より

$$y = 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2$$

$$\therefore\ y = 2\alpha x - \alpha^2 \quad —①$$

R における C の接線も同様にして

$$y = 2\beta x - \beta^2 \quad —②$$

① − ② より，$2(\alpha - \beta)x - \alpha^2 + \beta^2 = 0$

$\therefore\ \alpha \neq \beta$ より，$\underline{x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

(1) はよく出る問題

① にこれを代入して，$y = \alpha\beta$ $\quad \therefore\ \mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$

(2) 直線 QR の式は，$y = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}(x - \alpha) + \alpha^2$

$\therefore\ y = (\alpha+\beta)x - \alpha\beta \quad \cdots ①$ ここで 点 P は直線 ℓ 上にあるから

$$\alpha\beta = a \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} + b \quad \cdots ②$$

①，② より，$y = (\alpha+\beta)x - \dfrac{a(\alpha+\beta)}{2} - b$

$$\therefore\ (\alpha+\beta)\left(x - \frac{a}{2}\right) - (y + b) = 0$$

$\therefore\ \alpha, \beta$ の値にかかわらず，定点 $\left(\dfrac{a}{2},\ -b\right)$ を通る ▨