



2011年全学部第3問

3 空欄  ,  ,  に当てはまるものを解答群の中から選び、それ以外の空欄には、当てはまる0から9までの数字を入れよ。

座標平面上に3つの放物線  $C_1: y = x^2$ ,  $C_2: y = -x^2 - 8x - 8$ ,  $C_3: y = -x^2 + ax + b$  がある。  $C_1$  と  $C_3$  は  $t > 0$  の範囲にただ1つの共有点  $(t, t^2)$  を持ち、直線  $l$  は点  $P$  で  $C_2$  に接し、なおかつ点  $Q$  で  $C_3$  に接しているとする。次の問に答えよ。

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  の共有点は  $(-\text{ア}, \text{イ})$  である。また、 $C_1$  と  $C_3$  もただ1つの共有点を持つことから  $a = \text{ウ}t$ ,  $b = -\text{エ}t^2$  である。
- (2) 点  $P$ ,  $Q$  の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$  とする。  $l$  は点  $P$  における  $C_2$  の接線および点  $Q$  における  $C_3$  の接線に等しい。これら2つの接線の傾きおよび  $y$  軸との交点がともに等しいことから

$$\beta - \alpha = \text{オ}, \quad \beta^2 - \alpha^2 = \text{カ}$$

が成り立つ。したがって、 $\beta + \alpha = \text{キ}$  である。これより、直線  $l$  の方程式は

$$y = (t - \text{ク})x + \frac{t^2 + \text{ケコ}t + \text{サ}}{\text{シ}}$$

である。

- (3)  $C_3$  と  $x$  軸によって囲まれる部分の面積を  $S_1$ ,  $C_1$  と直線  $l$  によって囲まれる部分の面積を  $S_2$  とすると、

$$S_1 = \frac{\sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}} \cdot \text{ソ}t^3$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}} \cdot (t + \text{タ})^3$$

である。  $S_1 - S_2$  は  $t = \frac{\text{チ} + \text{ツ}}{\text{ト}} \sqrt{\text{テ}}$  のときに最小値をとる。

オ, カ, キの解答群

- ①  $t + 2$    ②  $t - 2$    ③  $2t + 4$    ④  $t + \sqrt{2}$    ⑤  $t - \sqrt{2}$   
 ⑥  $t^2 - 2$    ⑦  $t^2 - 4$    ⑧  $t^2 - 8$    ⑨  $2t^2 - 4$    ⑩  $2t^2 - 8$

