



2014年医学部第2問

2 a, b, c, d を実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。また、行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。以下の設問の に適切な数値を答えなさい。

(1) $a = 3$ かつ $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ のとき、 $b = \text{}$, $c = \text{}$, $d = \text{}$ である。このとき、 A^2 を A と E を用いて表すと、

$$A^2 = \text{} A + \text{} E$$

と表すことができる。また、

$$A^5 = \text{} A + \text{} E = \begin{pmatrix} \text{} & \text{} \\ \text{} & \text{} \end{pmatrix}$$

である。

(2) A が $A^2 = 3A - 2E$ を満たすとき、 $a + d$ の値は , または , または である。

(1) $a = 3$ のとき。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+bc & 3b+bd \\ 3c+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} bc = 2 \dots \textcircled{1} \\ 3b+bd = 10 \dots \textcircled{2} \\ 3c+cd = 5 \dots \textcircled{3} \\ bc+d^2 = 6 \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

①と④より、 $d^2 = 4$

(i) $d = 2$ のとき。

②より、 $5b = 10 \therefore b = 2$

③より、 $5c = 5 \therefore c = 1$

(ii) $d = -2$ のとき。

②より、 $b = 10$

③より、 $c = 5$

これは①をみたさないの不適。

(i), (ii)より、 $b = 2, c = 1, d = 2$ //

ケ-リ-ハミルトンの定理より、 $A^2 - 5A + 4E = 0 \therefore A^2 = 5A - 4E$ //

$$\therefore A^5 = A \cdot (A^2)^2 = A \cdot (25A^2 - 40A + 16E) = A(125A - 100E - 40A + 16E)$$

$$\therefore A^5 = 85(5A - 4E) - 84A = 341A - 340E = \begin{pmatrix} 683 & 682 \\ 341 & 342 \end{pmatrix} //$$

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a^2+bc = 3a-2 \dots \textcircled{5} \\ b(a+d) = 3b \dots \textcircled{6} \\ c(a+d) = 3c \dots \textcircled{7} \end{cases}$$

$$bc+d^2 = 3d-2 \dots \textcircled{8}$$

⑥-⑦より、 $(b-c)(a+d-3) = 0 \dots \textcircled{9}$

⑤-⑧より、 $(a-d)(a+d-3) = 0 \dots \textcircled{10}$

(つぎ)
⑨, ⑩より。
 $a+d \neq 3$ とす。 $b=c$ かつ $a=d$
⑤, ⑥に代入して、 $a^2+b^2=3a-2, 2ab=3b$
 $\therefore b(2a-3)=0$
 $\therefore b=0$ のとき、 $a=d=1$ または $a=d=2$
 $2a-3=0$ のとき、 $a=d=\frac{3}{2}$
 $\therefore a+d = 2, 3, 4$ //