0001907632908999

2014年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 曲線 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ と，正の定数 m がある．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 傾きが m となる C の接線を 2 本求めなさい．

(2) 直線 $y=mx$ と C の交点の座標を P および Q とするとき，P，Q それぞれの座標を求めなさい．ただし，P の x 座標は正の値とする．

(3) (1) で求めた 2 本の接線および，(2) の点 P，Q それぞれにおける C の接線とで囲まれた図形の面積を求めなさい．

(1) 接点を (s, t) とおくと．接線は $\dfrac{sx}{a^2}+\dfrac{ty}{b^2}=1$

∴傾き m は実数であることから．$-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{s}{t}=m$

∴ $t=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{s}{m}$ …① また．(s, t) は C 上の点であるから．

$\dfrac{s^2}{a^2}+\dfrac{t^2}{b^2}=1$ これに①を代入して．$s=\dfrac{\pm a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$，$t=\dfrac{\mp b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

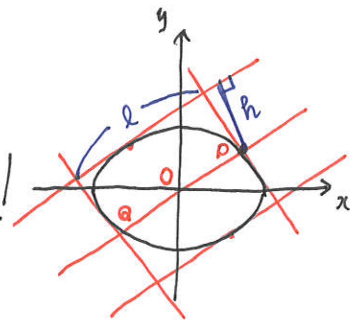
∴ $\underline{mx-y=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}$ //

(2) $y=mx$ を代入して．$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{m^2x^2}{b^2}=1$ ∴ $x=\pm\dfrac{ab}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}$

∴ $\underline{P\left(\dfrac{ab}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}, \dfrac{abm}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}\right), Q\left(-\dfrac{ab}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}, -\dfrac{abm}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}\right)}$ //

(3) 図形は平行四辺形なので

$l=2OP=2\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{m^2a^2+b^2}+\dfrac{a^2b^2m^2}{m^2a^2+b^2}}=\dfrac{2ab\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}$



点と直線のキョリ公式より．$h=\dfrac{\left|m\cdot\dfrac{ab}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}-\dfrac{abm}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}+\sqrt{a^2m^2+b^2}\right|}{\sqrt{m^2+1}}$

∴ $h=\dfrac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$

∴ $S=2\cdot l\cdot h=\underline{4ab}$ //