0002087632197999

和歌山大学

2015年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)$ と定数 a, b が次の等式を満たしている.

$$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = e^x + 2e^{-x} - \frac{3}{2}x^2 + ax + b$$

ただし, e は自然対数の底である. 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ と定数 a, b を求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(1) $x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt = e^x + 2e^{-x} - \frac{3}{2}x^2 + ax + b$ $\cdots(*)$

$x=0$ を代入すると,

$0 = 3 + b \quad \therefore \underline{b = -3}$ //

$(*)$ の両辺を x で微分すると,

$\int_0^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x) = e^x - 2e^{-x} - 3x + a \quad \cdots(**)$

$x=0$ を代入すると,

$0 = -1 + a \quad \therefore \underline{a = 1}$ //

$(**)$ の両辺を x で微分すると,

$\underline{f(x) = e^x + 2e^{-x} - 3}$ //

(2) $f(x) = 0$ となる x は,

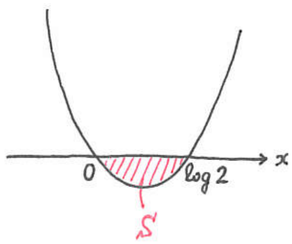
$e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$

$\therefore (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$

$(e^x - 2)(e^x - 1) = 0$

$\therefore x = \log 2,\ 0$

また, $0 \leqq x \leqq \log 2$ において. $f(x) \leqq 0$ であるから



$S = \int_0^{\log 2} -e^x - 2e^{-x} + 3\,dx$

$= \left[-e^x + 2e^{-x} + 3x\right]_0^{\log 2}$

$= -2 + 1 + 3\log 2 + 1 - 2$

$= \underline{-2 + 3\log 2}$ //