2014年第1問

$\boxed{1}$ 平面上のベクトル

$$\vec{a_n}=\left(\cos\frac{n\pi}{4},\ \sin\frac{n\pi}{4}\right),\ \vec{b_n}=\left(2\cos\frac{n\pi}{6},\ 2\sin\frac{n\pi}{6}\right)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$$

に対して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{12}|\vec{a_n}+\vec{b_n}|^2$ を求めよ.

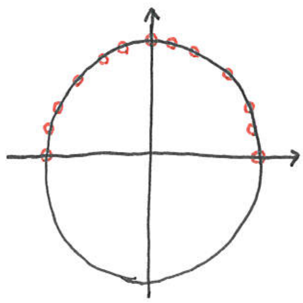
$$|\vec{a_n}|=1,\ |\vec{b_n}|=2,\quad \vec{a_n}\cdot\vec{b_n}=2\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{6}+2\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$=2\cos\left(\frac{n\pi}{4}-\frac{n\pi}{6}\right)$$

$$=2\cos\frac{n\pi}{12}$$

$$\therefore |\vec{a_n}+\vec{b_n}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a_n}\cdot\vec{b_n}+|\vec{b_n}|^2$$

$$=5+4\cos\frac{n\pi}{12}$$



$$\sum_{n=0}^{12}|\vec{a_n}+\vec{b_n}|^2=\sum_{n=0}^{12}\left(5+4\cos\frac{n\pi}{12}\right)$$

$$=65+4\sum_{n=0}^{12}\cos\frac{n\pi}{12}$$

ここで， $\cos 0+\cos\pi=0,\quad \cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{11\pi}{12}=0,\quad \cos\frac{2\pi}{12}+\cos\frac{10\pi}{12}=0$

$\cos\frac{3\pi}{12}+\cos\frac{9\pi}{12}=0,\quad \cos\frac{4\pi}{12}+\cos\frac{8\pi}{12}=0,\quad \cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{7\pi}{12}=0$

であるから，

$$\sum_{n=0}^{12}|\vec{a_n}+\vec{b_n}|^2=65+4\cdot\cos\frac{6\pi}{12}$$

$$=\underline{65}$$ //