

2016年 歯学部 第2問

2 関数 $F(x) = 3x^5 - 15x^4 - 35x^3 + 165x^2 + 360x + 240$ の導関数を $f(x)$ とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) $A = \frac{f(2) + f(3) + f(4)}{15}$ の値を求めよ。
 (2) $f(x)$ を因数分解せよ。
 (3) $y = x^2 - 2x - 3$ とおく。 $f(x)$ を y を用いて表せ。
 (4) 不等式 $f(x) < 750$ をみたす x の中で、最小の整数を m とする。 m の値を求めよ。また、閉区間 $[m, m+5]$ における $F(x)$ の最小値 B を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= 15x^4 - 60x^3 - 105x^2 + 330x + 360 \\ &= 15(x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24) \\ \therefore f(2) &= 15(16 - 32 - 28 + 44 + 24) = 360 \\ f(3) &= 15(81 - 108 - 63 + 66 + 24) = 0 \\ f(4) &= 15(256 - 256 - 112 + 88 + 24) = 0 \\ \therefore A &= \frac{360+0+0}{15} = \underline{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (1) \text{より, } f(3) &= f(4) = 0 \\ \text{さらに, } f(-2) &= 15(16 + 32 - 28 - 44 + 24) = 0 \\ f(-1) &= 15(1 + 4 - 7 - 22 + 24) = 0 \\ \therefore \text{因数定理より, } f(x) &= 15(x+1)(x+2)(x-3)(x-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) (2) \text{より, } f(x) &= 15(x+1)(x-3)(x+2)(x-4) \\ &= 15(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 8) \\ &= \underline{15y(y-5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) f(x) < 750 &\Leftrightarrow 15y(y-5) < 750 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 5y - 50 < 0 \\ &\Leftrightarrow (y+5)(y-10) < 0 \\ &\Leftrightarrow -5 < y < 10 \\ &\Leftrightarrow \underline{x^2 - 2x - 3 > -5} \text{ かつ } x^2 - 2x - 3 < 10 \\ &\quad (x-1)^2 + 1 > 0 \text{ より常に成り立つ} \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{14} < x < 1 + \sqrt{14} \text{ 右上へつづく} \end{aligned}$$

(4)のつづき

 $3 < \sqrt{14} < 4$ であるから $-3 < 1 - \sqrt{14} < -2$, $4 < 1 + \sqrt{14} < 5$

$\therefore m = \underline{-2}$

また、 $[-2, 3]$ における $F(x)$ の増減表は、

下のようになる。

x	-2	...	-1	...	3
$f(x)$	0	-	0	+	0
$F(x)$		↘		↗	

極小

$$\begin{aligned} \therefore B &= F(-1) \\ &= -3 - 15 + 35 + 165 - 360 + 240 \\ &= \underline{62} \end{aligned}$$