

2015年 歯学部 第3問

3 次の問いに答えよ。

(1)  $t = 2^x$  とおくと、 $A = -8^x + 4^x + 2^{x+2} - 4$  を  $t$  を用いて表せ。また、

$$t^B = \frac{8^x - 4^x - 2^{x+2} + 4}{(4^x - 4)(8^x - 4^x)}$$

をみたす定数  $B$  の値を求めよ。(2) 正の定数  $k$  に対して、 $C = k^2(-8^x + 4^x + 2^{x+2} - 4) + (4^x - 4)(8^x - 4^x)$  とおく。  $C$  を  $t$  と  $k$  を用いて表せ。ただし、答は因数分解せよ。(3) 曲線  $y = k^2(-8^x + 4^x + 2^{x+2} - 4) + (4^x - 4)(8^x - 4^x)$  と  $x$  軸との交点と接点の数がそれぞれ 1 個であるような  $k$  の値をすべて求めよ。(4)  $k > 2$  とする。曲線  $y = k^2(-8^x + 4^x + 2^{x+2} - 4) + (4^x - 4)(8^x - 4^x)$  が  $x$  軸と異なる 3 点  $(p, 0)$ ,  $(q, 0)$ ,  $(r, 0)$  で交わる時、 $(p-q)(q-r)(r-p) = 20$  をみたす  $k$  の値を求めよ。ただし、 $p < q < r$  とする。

$$(1) A = -(2^x)^3 + (2^x)^2 + 2^2 \cdot 2^x - 4 \quad \therefore A = -t^3 + t^2 + 4t - 4 //$$

$$\begin{aligned} t^B &= \frac{-A}{(t^2-4)(t^3-t^2)} \\ &= \frac{t^3-t^2-4t+4}{t^2(t-1)(t+2)(t-2)} \\ &= \frac{(t-1)(t+2)(t-2)}{t^2(t-1)(t+2)(t-2)} \\ &= t^{-2} \end{aligned}$$

$$\therefore B = -2 //$$

$$\begin{aligned} (2) C &= -k^2(t-1)(t+2)(t-2) + t^2(t-1)(t+2)(t-2) \\ &= (t+k)(t-k)(t-1)(t+2)(t-2) // \end{aligned}$$

(3) (2) より、 $C = 0$  となるのは、 $t = \pm k, \pm 2, 1$  $k > 0$  と  $t = 2^x$  より、 $C = 0$  となるのは、 $x = \log_2 k, 1, 0$ 

$$\therefore \log_2 k = 0, 1 \quad \therefore k = 1, 2 //$$

(注) (3) も  $k > 0$  として解答した。(4) (3) より、 $x$  軸と異なる 3 点で交わるのは、 $k$  が 1, 2 のときであり、 $k > 2$  より、

$$p = 0, q = 1, r = \log_2 k$$

$$\therefore -1 \cdot (1 - \log_2 k) \cdot (\log_2 k) = 20 \Leftrightarrow (\log_2 k)^2 - \log_2 k - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 k - 5)(\log_2 k + 4) = 0$$

$$\therefore k > 2 \text{ より、} k = 32 //$$