

2012年 第7問

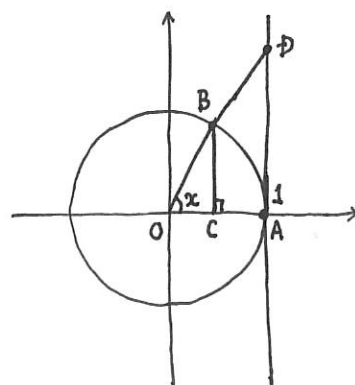
7 原点 O を中心とする半径 1 の円において扇形 OAB を考える。ただし、点 A は $(1, 0)$ であり、点 B は第1象限にあるとする。扇形 OAB の中心角は、 x ラジアン $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ であるとする。点 B から OA におろした垂線を BC 、点 A における円の接線が、点 O と点 B を通る直線と交わる点を D とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 ODA 、三角形 OAB 、扇形 OAB の面積を、 x を用いてそれぞれ表せ。
 (2) 不等式 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ が成り立つことを示せ。
 (3) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ。ただし、 $x \rightarrow +0$ は、 x が正の値をとりながら限りなく 0 に近づくことを表す。

$$(1) OA = 1, AD = \tan x \text{ より. } \triangle ODA = \frac{1}{2} \tan x //$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x //$$

$$\text{扇形 } OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x //$$



(2) 右図より、 $\triangle OAB < \text{扇形 } OAB < \triangle ODA$ なので (1) より、

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$$

$$2 \text{ 倍して, } \sin x (> 0) \text{ で割ると. } 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore \text{逆数を考えて. } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \square$$

(3) (2) の式において、極限をとると。

$$\lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1 \text{ となるので. はさみうちの原理より.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ となる} \quad \square$$