0001826723718999

# 九州歯科大学

2014年 歯学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $3-\sqrt{5}+\dfrac{m}{3-\sqrt{5}}=n$ をみたす整数 $m$ と $n$ の値を求めよ．

(2) $F(x)=\sum_{k=1}^{12}\{\log(e^{2k}x^2+e^{-2k})-\log(e^{-2k}x^2+e^{2k})\}$ とおくとき，$\alpha=\lim_{x\to\infty}F(x)$ と $\beta=\lim_{x\to 0}F(x)$ の値を求めよ．ただし，$e$ は自然対数の底である．

(3) 2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $f(0)=-6$, $g(0)=2$, $g(x)>0$, $g'(x)=f'(x)+4x+3$, $f'(x)=\dfrac{f(x)g'(x)}{g(x)}-2xg(x)$ をみたすとき，$g(x)=\dfrac{ax}{x^2+4}+b$ となる定数 $a$ と $b$ を求めよ．ただし，$f'(x)$ と $g'(x)$ はそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の導関数である．

(1) $(\text{左辺})=3-\sqrt{5}+\dfrac{m(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$

$=\dfrac{3}{4}m+3+\sqrt{5}\left(\dfrac{m}{4}-1\right)$

$\therefore\ \dfrac{3}{4}m+3=n,\ \dfrac{m}{4}-1=0\quad \therefore\ \underline{m=4,\ n=6}$

(2) $F(x)=\log\dfrac{e^4x^2+1}{x^2+e^4}\cdot\dfrac{e^8x^2+1}{x^2+e^8}\cdot\dfrac{e^{12}x^2+1}{x^2+e^{12}}\cdots\dfrac{e^{48}x^2+1}{x^2+e^{48}}$

$\therefore\ \beta=\lim_{x\to 0}F(x)=\log\dfrac{1}{e^4}\cdot\dfrac{1}{e^8}\cdot\dfrac{1}{e^{12}}\cdots\dfrac{1}{e^{48}}$

$=\log\dfrac{1}{e^{312}}$

$=\underline{-312}$

$F(x)=\log\dfrac{e^4+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{e^4}{x^2}}\cdot\dfrac{e^8+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{e^8}{x^2}}\cdots\dfrac{e^{48}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{e^{48}}{x^2}}$ より $\alpha=\log e^4\cdot e^8\cdots e^{48}=\underline{312}$

(3) $g'(x)=\dfrac{a(x^2+4)-2ax^2}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-a(x^2-4)}{(x^2+4)^2}\quad\therefore\ f'(x)=\dfrac{-a(x^2-4)}{(x^2+4)^2}-4x-3$

$g(0)=2$ より $b=2$，$f'(0)=\dfrac{f(0)g'(0)}{g(0)}\quad\therefore\ \dfrac{a}{4}-3=\dfrac{-6\cdot\frac{a}{4}}{2}\quad\therefore\ a=3$

$\therefore\ \underline{a=3,\ b=2}$