慶應義塾大学

2016 年 理工学部 第 2 問　1枚目／2枚

数理 石井K

2　$f(x)$ は 2 次関数であり，$f(0)=f(1)=0$ を満たすとする．

(1) $a=\frac{1}{2}f''(0)$ とする．このとき，$f(x)$ は a を用いて $f(x)=$ キ と表される．　ax^2-ax

(2) 定積分

$$\int_0^1 \{(f'(x)-x)^2-f(x)\}\,dx$$

の値が最も小さくなるのは $f(x)=$ ク のときである．また，そのときの定積分の値は ケ である．　$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x$　$\frac{5}{16}$

以下では，$f(x)=$ ク，$m=$ ケ とする．

(3) 関数 $h(x)$ は $h(0)=h(1)=0$ を満たし，その導関数 $h'(x)$ は連続であるとする．さらに，I と J を

$$I=\int_0^1 \{(f'(x)+h'(x)-x)^2-(f(x)+h(x))\}\,dx$$

$$J=\int_0^1 \{(f'(x)-x)^2-f(x)\}\,dx+\int_0^1 (h'(x))^2\,dx$$

で定める．このとき，等式

$$I=J$$

を証明しなさい．

(4) 関数 $g(x)$ は $g(0)=g(1)=0$ を満たし，その導関数 $g'(x)$ は連続であるとする．このとき，不等式

$$\int_0^1 \{(g'(x)-x)^2-g(x)\}\,dx \geqq m$$

を証明しなさい．

(1) $f(x)=px(x-1)$ とおけるので，$f''(x)=2p$　∴ $f''(0)=2p$ より，$a=p$　∴ $\underline{f(x)=ax^2-ax}$ //

(2) $f'(x)=2ax-a$　∴ 与式を F とおくと，

$$F=\int_0^1 \{(2a-1)x-a\}^2-(ax^2-ax)\,dx$$

$$=\int_0^1 (4a^2-5a+1)x^2+(-4a^2+3a)x+a^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(4a^2-5a+1)x^3+\frac{1}{2}(-4a^2+3a)x^2+a^2x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{6}a+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{16}$$

∴ $a=\frac{1}{4}$ すなわち，$\underline{f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x}$ // のとき，定積分の値は $\underline{\frac{5}{16}}$ //

0002176633287999

慶應義塾大学

2016年 理工学部 第2問　　2枚目／2枚

数理石井K

$\boxed{2}$ $f(x)$ は 2 次関数であり，$f(0)=f(1)=0$ を満たすとする．

(1) $a=\frac{1}{2}f''(0)$ とする．このとき，$f(x)$ は a を用いて $f(x)=\boxed{\text{キ}}$ と表される．

(2) 定積分

$$\int_0^1 \{(f'(x)-x)^2-f(x)\}\,dx$$

の値が最も小さくなるのは $f(x)=\boxed{\text{ク}}$ のときである．また，そのときの定積分の値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

以下では，$f(x)=\boxed{\text{ク}}$，$m=\boxed{\text{ケ}}$ とする．

(3) 関数 $h(x)$ は $h(0)=h(1)=0$ を満たし，その導関数 $h'(x)$ は連続であるとする．さらに，I と J を

$$I=\int_0^1 \{(f'(x)+h'(x)-x)^2-(f(x)+h(x))\}\,dx$$

$$J=\int_0^1 \{(f'(x)-x)^2-f(x)\}\,dx+\int_0^1 (h'(x))^2\,dx$$

で定める．このとき，等式

$$I=J$$

を証明しなさい．

(4) 関数 $g(x)$ は $g(0)=g(1)=0$ を満たし，その導関数 $g'(x)$ は連続であるとする．このとき，不等式

$$\int_0^1 \{(g'(x)-x)^2-g(x)\}\,dx \geqq m$$

を証明しなさい．

(3) $I-J=\int_0^1 \{f'(x)+h'(x)-x\}^2-\{f'(x)-x\}^2+f(x)-f(x)-h(x)-\{h'(x)\}^2\,dx$

$=\int_0^1 2\{f'(x)-x\}h'(x)-h(x)\,dx$

$=2\left[\{f'(x)-x\}h(x)\right]_0^1-2\int_0^1\{f''(x)-1\}h(x)\,dx-\int_0^1 h(x)\,dx$

$=2\left\{-\frac{3}{4}h(1)+\frac{1}{4}h(0)\right\}+\int_0^1 h(x)\,dx-\int_0^1 h(x)\,dx$

$=0$

$\therefore I=J$ ▨

(4) $g(x)=f(x)+h(x)$ とおくと

(与式) $=\int_0^1 \{f'(x)+h'(x)-x\}^2-\{f(x)+h(x)\}\,dx$

$=\int_0^1 \{f'(x)-x\}^2-f(x)\,dx+\underbrace{\int_0^1\{h'(x)\}^2dx}_{\geqq 0}$　(∵(3)より)

$\geqq \int_0^1 \{f'(x)-x\}^2-f(x)\,dx=\frac{5}{16}$　(∵(2)より) ▨