0002258721477999

宮崎大学

2016年 教育文化（理系） 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

1　次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 次の関数を微分せよ．

（i）$y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

（ii）$y = \log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

（i）$\displaystyle\int_0^2 |e^x - 2|\,dx$

（ii）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2(2x)\,dx$

（iii）$\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$

（iv）$\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2}\,dx$

(1)(i) $y' = \dfrac{1+e^{\frac{1}{x}} - x(1+e^{\frac{1}{x}})'}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2} = \underline{\dfrac{x+(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}}$ //

(ii) $y = \log\sqrt{\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^2}{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}}$　← 根号内の分母を有理化

$= \log\sqrt{(\sqrt{1+x^2}+x)^2}$

$\sqrt{1+x^2}+x > 0$ より

$= \log(\sqrt{1+x^2}+x)$

$\therefore\ y' = (\sqrt{1+x^2}+x)' \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \underline{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$ //

(2)(i) $\displaystyle\int_0^2 |e^x-2|\,dx = \int_0^{\log 2}(2-e^x)\,dx + \int_{\log 2}^2 (e^x-2)\,dx$

$= \Big[2x - e^x\Big]_0^{\log 2} + \Big[e^x - 2x\Big]_{\log 2}^2$

$= 2\log 2 - 2 + 1 + e^2 - 4 - 2 + 2\log 2$

$= \underline{e^2 + 4\log 2 - 7}$ //

(2)(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{2}\cdot\left(\frac{\sin 4x}{4}\right)'dx$

$\displaystyle= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{x\sin 4x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 4x}{8}\,dx$

$\displaystyle= \frac{\pi^2}{36} + \frac{\sqrt{3}}{48}\pi + \left[-\frac{\cos 4x}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \dfrac{\pi^2}{36} + \dfrac{\sqrt{3}}{48}\pi + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{32}$

$= \underline{\dfrac{\pi^2}{36} + \dfrac{\sqrt{3}}{48}\pi + \dfrac{3}{64}}$ //

2枚目へつづく

0002258721477999

宮崎大学

2016年 教育文化（理系） 第1問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す．

(1) 次の関数を微分せよ．

(i) $y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(ii) $y = \log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$

(2) 次の定積分の値を求めよ．

(i) $\displaystyle\int_0^2 |e^x-2|\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin^2(2x)\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$

(iv) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^3+x^2-2x+2}{x^4+x^2-2}\,dx$

(2)(iii) $t = 1+\log x$ とおいて置換積分する．

$dt = \dfrac{1}{x}dx$，$\begin{array}{c|c} x & 1\to e \\ \hline t & 1\to 2 \end{array}$

$$(与式) = \int_1^2 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

$$= \underline{\frac{4\sqrt{2}-2}{3}}\ //$$

(iv)
$$(与式) = \int_2^4 \frac{x^2+2+2x(x^2-1)}{(x^2+2)(x^2-1)}\,dx$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2+2}\right)dx$$

$$= \int_2^4 \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\right\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\log(x-1) - \log(x+1)\right) + \log(x^2+2)\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{2}(\log 3 - \log 5) + \log 18 - \frac{1}{2}(-\log 3) - \log 6$$

$$= \underline{2\log 3 - \frac{1}{2}\log 5}\ //$$