

2014年 第2問

 数理
石井K

2 以下の問いに答えなさい。

 $\sin\theta - \cos\theta$ が無理数であることを示したい。ここで、 θ は以下を満たすものとする。

$$\sin\theta \cos\theta = \frac{1}{4} \quad \text{ただし, } \frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$$

- (1) θ の値を答えなさい。
 (2) $\sin\theta - \cos\theta$ の値を答えなさい。
 (3) (2)で求めた値が無理数であることを背理法を用いて証明しなさい。なお、必要であれば $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ が無理数であることを利用してもよい。

$$(1) \quad 2 \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad \sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi \quad \text{より} \quad 2\theta = \frac{5}{6}\pi \quad \therefore \theta = \frac{5}{12}\pi //$$

$$(2) \quad (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2 \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi \quad \text{より} \quad \sin\theta - \cos\theta > 0 \quad \therefore \sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} //$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = p \quad (\text{有理数}) \quad \text{と仮定すると,}$$

$$\sqrt{2} = 2p \quad (\text{右辺}) \text{は有理数なので}$$

 $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \text{は無理数} \quad \square$$