0002079540297999

福井大学

2015年 医学部 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 三角形OABがあり，$0<p<1$，$0<q<1$として，辺OAを$p:(1-p)$に内分する点をC，辺OBを$q:(1-q)$に内分する点をDとする．線分ADと線分BCの交点をE，線分AB，OE，CDの中点をそれぞれF，G，Hとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，以下の問いに答えよ．

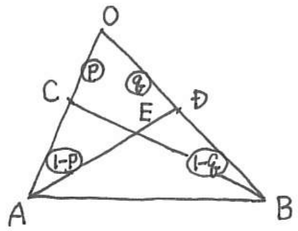
(1) $\overrightarrow{OE}$をp，q，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) 3点F，G，Hは一直線上にあることを示せ．

(3) $\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi$に対して

$$\mathrm{GF}:\mathrm{GH}=7:2,\quad \mathrm{AB}\perp\mathrm{GF}$$

となるとき，pとqの値を求めよ．



(1) $\triangle$OADにおいて考えると．$\overrightarrow{OE}=$

AE : ED $= s : 1-s$ $(0<s<1)$ とおくと．$\overrightarrow{OE}=(1-s)\vec{a}+s\cdot q\vec{b}$ $\cdots$①

$\triangle$OCBにおいて考えると．

CE : EB $= t : 1-t$ $(0<t<1)$ とおくと．$\overrightarrow{OE}=(1-t)p\vec{a}+t\vec{b}$ $\cdots$②

①，②と $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ より．

$(1-s)=(1-t)p$，　$sq=t$

これらより．$1-s=p-spq$　　$\therefore (1-pq)s=1-p$　　$\therefore s=\dfrac{1-p}{1-pq}$

$\therefore$ ①に代入して，$\underline{\overrightarrow{OE}=\dfrac{p(1-q)}{1-pq}\vec{a}+\dfrac{q(1-p)}{1-pq}\vec{b}}$ //

(2) $\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{p(1-q)}{2(1-pq)}\vec{a}+\dfrac{q(1-p)}{2(1-pq)}\vec{b}$

$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}p\vec{a}+\dfrac{1}{2}q\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{FG}=\dfrac{p-1}{2(1-pq)}\vec{a}+\dfrac{q-1}{2(1-pq)}\vec{b}$，$\overrightarrow{FH}=\dfrac{p-1}{2}\vec{a}+\dfrac{q-1}{2}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{FH}=(1-pq)\cdot\overrightarrow{FG}$ となり．3点，F，G，Hは一直線上にある ■

(3). $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GF}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(\dfrac{1-p}{2(1-pq)}\vec{a}+\dfrac{1-q}{2(1-pq)}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2(1-pq)}\left\{(q-p)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-q)|\vec{b}|^2-(1-p)|\vec{a}|^2\right\}$

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\dfrac{2}{3}\pi=-3$，$|\vec{a}|^2=4$，$|\vec{b}|^2=9$ より．

2枚目につづく

2015年 医学部 第1問　　2枚目／2枚

$\boxed{1}$ 三角形OABがあり，$0 < p < 1$，$0 < q < 1$として，辺OAを$p:(1-p)$に内分する点をC，辺OBを$q:(1-q)$に内分する点をDとする．線分ADと線分BCの交点をE，線分AB，OE，CDの中点をそれぞれF，G，Hとする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$とするとき，以下の問いに答えよ．

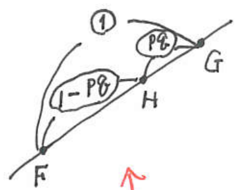
(1) $\overrightarrow{OE}$をp，q，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) 3点F，G，Hは一直線上にあることを示せ．

(3) $OA = 2$，$OB = 3$，$\angle AOB = \frac{2}{3}\pi$に対して

$$GF : GH = 7 : 2, \quad AB \perp GF$$

となるとき，pとqの値を求めよ．



(2)より．このような位置関係になる．

(3)のつづき．

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GF} = \dfrac{1}{2(1-pq)} \cdot (7p - 12q + 5)$．

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{GF}$ より．$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GF} = 0$ なので，　$7p - 12q + 5 = 0$ …③

また，$GF : GH = 7 : 2$ より．　$|\overrightarrow{FG}| : |\overrightarrow{FH}| = 1 : 1-pq = 7 : 5$　(∵上の図より)

$\therefore 5 = 7 - 7pq$　　　$\therefore pq = \dfrac{2}{7}$ …④

③④より．　$p\left(\dfrac{7p+5}{12}\right) = \dfrac{2}{7}$

$\therefore 7p^2 + 5p = \dfrac{24}{7}$

$\therefore 49p^2 + 35p - 24 = 0$

$(7p+8)(7p-3) = 0$

$0 < p < 1$ より．　$p = \dfrac{3}{7}$　このとき．④より．　$q = \dfrac{2}{3}$

$$\therefore \underline{p = \frac{3}{7},\ q = \frac{2}{3}}_{\,/\!/}$$