

2010年工学部第4問

4 次に答えよ。ただし、対数は自然対数とする。必要ならば、 $1.09 < \log 3 < 1.10$  を用いてよい。

(1) すべての  $x > 0$  に対して、不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 関数  $f(x) = x - \frac{x^2}{3} - \log(1+x)$  の  $0 \leq x \leq 2$  における最大値、および最小値を求めよ。

(3) 方程式  $x - \frac{x^2}{3} = \log(1+x)$  は  $0 < x < 2$  の範囲に解を1つだけもつことを示せ。

(4) (3) における解を  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2$ ) とする。曲線  $y = x - \frac{x^2}{3}$  と曲線  $y = \log(1+x)$  で囲まれた図形 ( $0 \leq x \leq \alpha$  の部分) の面積を  $S$  とする。また、曲線  $y = x - \frac{x^2}{3}$ ,  $y = \log(1+x)$  と直線  $x = 2$  で囲まれた図形 ( $\alpha \leq x \leq 2$  の部分) の面積を  $T$  とする。 $S$  と  $T$  の大小を比較せよ。