

2014年工学部第3問

3 関数 $s(t)$ はつねに $s'(t) > 0$ をみたし、 $s(0) = 0$ とする。座標平面上を運動する点 P の座標 (x, y) は、時刻 t の関数として $x = s(t)$, $y = \frac{1}{2}\{s(t)\}^2$ で与えられ、点 P の速度 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ は

$$|\vec{v}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \{s(t)\}^2}}$$

をみたすとする。また、 $\alpha = s\left(-\frac{4}{3}\right)$, $\beta = s\left(\frac{4}{3}\right)$ とおく。次に答えよ。

- (1) $\frac{dx}{dt} = f(x)$ が成り立つように関数 $f(x)$ を定めよ。
- (2) $\frac{4}{3} = \int_{-\frac{4}{3}}^0 \frac{1}{f(x)} \frac{dx}{dt} dt$, $\frac{4}{3} = \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{1}{f(x)} \frac{dx}{dt} dt$ を用いて、 α と β の値を求めよ。
- (3) $\frac{d^2x}{dt^2} = g(x)$ が成り立つように関数 $g(x)$ を定めよ。また、 $\alpha \leq x \leq \beta$ のとき $g(x)$ が最大となる x の値を求めよ。