2013年 工学部 第2問

2 a，b を実数とし，行列 A を2次の正方行列とする．x，y についての連立1次方程式を，行列を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(*)$$

と表す．次に答えよ．

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，連立1次方程式 $(*)$ を解け．

(2) c を実数とし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする．また，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(i) $a \neq bc$ とする．連立1次方程式 $(*)$ がただ1つの解をもつことを示せ．また，連立1次方程式 $A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ もただ1つの解をもつことを示せ．

(ii) 連立1次方程式 $(*)$ が解をもたないための必要十分条件を a，b，c を用いて表せ．この条件が成り立つとき，連立1次方程式 $A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ も解をもたないことを示せ．

(iii) 連立1次方程式 $(*)$ が解を無数にもつための必要十分条件を a，b，c を用いて表せ．この条件が成り立つとき，自然数 m に対して，連立1次方程式

$$(A+A^2+A^3+\cdots+A^{2m-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

も解を無数にもつことを示せ．