

2014年第3問

3  $e$  は自然対数の底とする。O を原点とする座標平面に3点

$$A(e^{-\theta} + \sqrt{3}, e^{-\theta}), \quad B(\cos \theta, \sin \theta), \quad C(\sqrt{3}, 0)$$

がある。ただし、 $\theta \geq 0$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 三角形 ABC の面積を  $F(\theta)$  とする。  $F(\theta)$  を求めよ。
- (2)  $F(\theta)$  の導関数を  $F'(\theta)$  とする。区間  $0 < \theta < 2\pi$  において  $F'(\theta) = 0$  となる  $\theta$  の値をすべて求めよ。
- (3)  $n$  を自然数とする。区間  $2(n-1)\pi \leq \theta \leq 2n\pi$  における  $F(\theta)$  の最大値、最小値をそれぞれ  $\alpha_n, \beta_n$  とする。  $\alpha_n, \beta_n$  を求めよ。また最大値を与える  $\theta$  の値と最小値を与える  $\theta$  の値を求めよ。
- (4) (3) で求めた  $\alpha_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) に対して、  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  とおく。  $S$  の値を求めよ。