0001668181338999

首都大学東京

2014年 第3問

数理 石井K

3 $f(x)=x(x-2)-6|x|$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$ の最小値を求めなさい．

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(t,\ f(t))$ $(t>0)$ を通る接線が曲線 $y=f(x)$ の $x<0$ の部分と点Bで接しているとき，点A，Bの座標と接線の方程式を求めなさい．

(3) (2)において曲線 $y=f(x)$ と線分ABで囲まれる部分の面積を求めなさい．

「おける」と解釈した．

(1) (i) $x\geqq 0$ のとき

$f(x)=x^2-2x-6x$

$=(x-4)^2-16$

$\therefore$ $x\geqq 0$ での最小値は -16 $(x=4$ のとき$)$

(ii) $x<0$ のとき．

$f(x)=x^2-2x+6x$

$=(x+2)^2-4$

$\therefore$ $x<0$ での最小値は -4 $(x=-2$ のとき$)$

(i)，(ii)より．$f(x)$ の最小値は -16 $(x=4$ のとき$)$ //

(2) (i) $x>0$ のとき．

$f'(x)=2x-8$ より

接点を $(p,\ q)$ とおくと接線は

$y=(2p-8)(x-p)+q$

ここで $q=f(p)=p^2-8p$ より

$y=(2p-8)x-p^2$

(ii) $x<0$ のとき

$f'(x)=2x+4$

接点を $(r,\ r^2+4r)$ とおくと接線は

$y=(2r+4)(x-r)+r^2+4r$

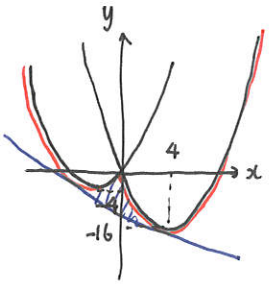
$\therefore$ $y=(2r+4)x-r^2$

(i)と(2)の接線が同じものを表すとき． $2p-8=2r+4$ かつ $p^2=r^2$

$\Leftrightarrow$ $p-r=6$ かつ $(p-r)(p+r)=0$

$\Leftrightarrow$ $p=3,\ r=-3$

$\therefore$ A$(3,\ -15)$，B$(-3,\ -3)$ 接線は $y=-2x-9$ //



(3) $S=\int_{-3}^{0}x^2+4x-(-2x-9)\,dx+\int_{0}^{3}x^2-8x-(-2x-9)\,dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+3x^2+9x\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{0}^{3}=18$ //