



2010年理系第3問

3 原点を中心とする半径1の円を $C_1$ とし、原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を $C_2$ とする。 $C_1$ 上に点 $P_1(\cos\theta, \sin\theta)$ があり、また、 $C_2$ 上に点 $P_2(\frac{1}{2}\cos 3\theta, \frac{1}{2}\sin 3\theta)$ がある。ただし、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ であるとする。線分 $P_1P_2$ の中点を $Q$ とし、点 $Q$ の原点からの距離を $r(\theta)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $Q$ の $x$ 座標の取りうる範囲を求めよ。
- (2) 点 $Q$ が $y$ 軸上にあるときの $\theta$ の値を $\alpha$ とする。このとき、 $\alpha$ および定積分

$$\int_0^{\alpha} \{r(\theta)\}^2 d\theta$$

を求めよ。