2011年第5問

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ．

(1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \log(1+\sqrt{x})\,dx$$

(2) 点 $(1,\ 1)$ を中心とする半径1の円と，x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ．ただし，回転させる図形は円の中心を含まないものとする．

(1) 部分積分する．

$$\int \log(1+\sqrt{x})\,dx = \int (x-1)'\log(1+\sqrt{x})\,dx$$

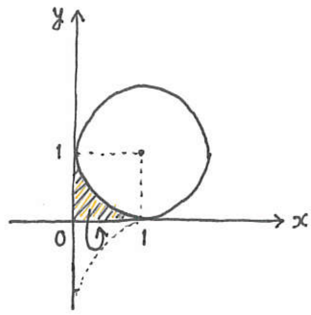
$$= (x-1)\log(1+\sqrt{x}) - \int (x-1)\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= (x-1)\log(1+\sqrt{x}) - \int \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= (x-1)\log(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\,dx$$

$$= \underline{(x-1)\log(1+\sqrt{x}) + \sqrt{x} - \frac{1}{2}x + C} \quad (C：積分定数)$$ //

(2) $(x-1)^2+(y-1)^2=1 \iff y = 1 \pm \sqrt{2x-x^2}$



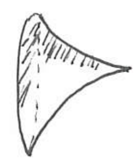
$$V = \pi\int_0^1 \left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^1 1+2x-x^2-2\sqrt{2x-x^2}\,dx$$

$$= \pi\left[x+x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 2\pi\underbrace{\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx}$$

右下図の斜線部分の面積

(半径1の円の $\frac{1}{4}$)



$$= \underline{\frac{5}{3}\pi - \frac{\pi^2}{2}}$$ //