



2010年 医学部 第3問

3 微分可能な関数 $y = f(x)$ が次の方程式を満たすとする。

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 f(x) = 0 \quad (\text{A})$$

ここに n は自然数, a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) は実数の定数で, $a_n \neq 0$ である。また, $y^{(k)} = f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の k 次導関数で $y^{(0)} = f^{(0)}(x) = f(x)$ とする。(A) のような方程式を第 n 階微分方程式といい, (A) に対して t の n 次方程式

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0 \quad (\text{B})$$

を (A) の特性方程式という。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 特性方程式 (B) の解が実数 r であるとき, 関数 $y = e^{rx}$ が方程式 (A) を満たすことを証明せよ。
- (2) n 次方程式 (B) が実数 r を k 重解^(注) にもつとき, 次の t に関する方程式は r を $k-1$ 重解にもつことを証明せよ。ただし, $k = 2, 3, \dots$ とする。

$$na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + 2a_2 t + a_1 = 0$$

(注) t の m 次方程式が適当な多項式 $Q(t)$ を用いて $(t-r)^k Q(t) = 0$ となるとき, $t=r$ をこの方程式の k 重解と定義する。ただし, $k = 1, 2, \dots$ とする。

- (3) 実数の定数 r に対して x の関数を $y_i = x^i e^{rx}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) とする。このとき, $y_j^{(n)}$ を x , $y_{j-1}^{(n-1)}$ および $y_{j-1}^{(n)}$ を用いて表せ。ただし, $j = 1, 2, 3, \dots$ とする。
- (4) 実数 r が n 次方程式 (B) の k 重解であるとき $y_i = x^i e^{rx}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k-1$) が微分方程式 (A) を満たすことを証明せよ。ただし, k は自然数とする。