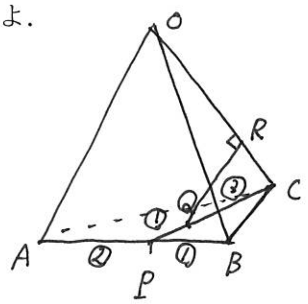
2014年第2問

$\boxed{2}$ 一辺の長さが1の正四面体OABCを考える．辺ABを2：1に内分する点をPとし，線分CPを3：1に内分する点をQとする．また，直線OC上の点Rを$\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$となるようにとる．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．さらに，$\overrightarrow{OQ}$の大きさ$|\overrightarrow{OQ}|$を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OR}$と$\overrightarrow{RC}$の大きさの比$|\overrightarrow{OR}|:|\overrightarrow{RC}|$を求めよ．

(3) △OQRの面積を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{4}\vec{c}$

$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + \frac{1}{4}\vec{c}$

$= \underline{\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}}$ //

$\therefore |\overrightarrow{OQ}|^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{11}{16}$

$\therefore \underline{|\overrightarrow{OQ}| = \frac{\sqrt{11}}{4}}$ //

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}$

$= 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

(2) $|\overrightarrow{OR}| : |\overrightarrow{RC}| = s : 1-s$ とおくと

$\overrightarrow{QR} = s\overrightarrow{QC} + (1-s)\overrightarrow{QO}$

$= s\overrightarrow{OC} - s\overrightarrow{OQ} + (s-1)\overrightarrow{OQ}$

$= s\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$

$\therefore \overrightarrow{QR}\cdot\vec{c} = \left(s - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$

$= s - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}$

$= s - \frac{5}{8}$　　$\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$ より $\overrightarrow{QR}\cdot\vec{c} = 0$　$\therefore s = \frac{5}{8}$

$\therefore |\overrightarrow{OR}| : |\overrightarrow{RC}| = \frac{5}{8} : \frac{3}{8} = \underline{5:3}$ //

(3) $|\overrightarrow{QR}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{8} - \frac{3}{16} - \frac{3}{32} = \frac{19}{64}$　$\therefore |\overrightarrow{QR}| = \frac{\sqrt{19}}{8}$

$|\overrightarrow{OR}| = \frac{5}{8}$ より $S = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{\sqrt{19}}{8} = \underline{\frac{5\sqrt{19}}{128}}$ //