2015年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面の原点をOとし，放物線 $y=x^2$ の上を相異なる2点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ は $\angle\mathrm{AOB}$ が直角になるように動くとする．また，点Aと点Bを通る直線を ℓ とする．以下の問いに答えよ．

(1) a と b がみたす関係を求めよ．

(2) 直線 ℓ の方程式を $y=px+q$ とする．q の値を求めよ．

(3) 原点Oから直線 ℓ に下ろした垂線をOHとする．点Hの軌跡を求めよ．

(1) 直線OA，OBの傾きはそれぞれ a，b であるから，

$\angle\mathrm{AOB}$ が直角より，$\underline{ab=-1}$ //

(2) $\ell:\ y=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}(x-a)+a^2$

$\therefore\ \ell:\ y=(a+b)x-ab$

$\therefore$ (1)より，$\underline{q=-ab=1}$ //

(3) 点Hは ℓ 上の点で，(2)より，$\ell:\ y=(a+b)x+1$ なので，$\mathrm{H}(X,Y)$ とおくと，

$Y=(a+b)X+1$ …①

一方，$\mathrm{OH}\perp\ell$ より，

(i) $X\neq 0$ のとき

$\ell:(a+b)x-y+1=0$ と $\mathrm{OH}:\ \dfrac{Y}{X}x-y=0$ より

$\dfrac{Y}{X}(a+b)+1=0$ …②

①，②より，$X^2+\left(Y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ $(X\neq 0)$

(ii) $X=0$ のとき

①より，$Y=1$　このとき $\mathrm{OH}\perp\ell$ より $\ell:\ y=1$　$\therefore\ a+b=0,\ ab=-1$ より $(a,b)=(1,-1),(-1,1)$

(i)，(ii)より 求める軌跡は

$\underline{\text{円 } x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\ \text{(ただし原点を除く)}}$ //