九州大学

2014 年 文系 第 3 問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 鋭角三角形△ABCについて，∠A，∠B，∠Cの大きさを，それぞれ A，B，C とする．△ABCの重心をG，外心をOとし，外接円の半径を R とする．

(1) AとOから辺BCに下ろした垂線を，それぞれAD，OEとする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C,\quad \mathrm{OE} = R\cos A$$

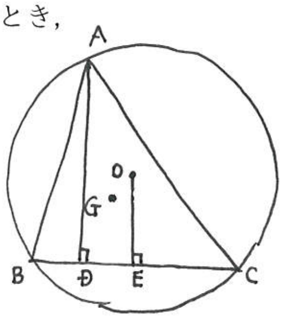
を証明せよ．

(2) GとOが一致するならば△ABCは正三角形であることを証明せよ．

(3) △ABCが正三角形でないとし，さらにOGがBCと平行であるとする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 3\mathrm{OE},\quad \tan B\tan C = 3$$

を証明せよ．



(1) $\sin C = \dfrac{AD}{AC}$　また，正弦定理より $\dfrac{AC}{\sin B} = 2R$

$\therefore \sin C = \dfrac{AD}{2R\sin B}$　よって $AD = 2R\sin B\sin C$

△OBCの面積は $\frac{1}{2}OE\cdot BC$　一方Rを用いると $\frac{1}{2}R^2\sin 2A$ とも表せるので

$\frac{1}{2}OE\cdot BC = \frac{1}{2}R^2\cdot 2\sin A\cos A$　正弦定理より $BC = 2R\sin A$

$\therefore OE = \dfrac{2R^2\sin A\cos A}{BC} = \dfrac{2R^2\sin A\cos A}{2R\sin A} = R\cos A$ ■

(2) △OBCは OB＝OC（＝外接円の半径）の二等辺三角形なので
Oから下ろした垂線の足Eは線分BCの中点となる．よって
直線AE上に重心Gはあるので，O＝Gのとき AE⊥BC
よって△ABCは AB＝AC の二等辺三角形となる
BとOから辺ACに下ろした垂線をそれぞれBF，OHとして
同様に考えると．△ABCは BA＝BC の二等辺三角形となる
したがって△ABCは正三角形となる ■

0001631098638999

九州大学

2014年 文系 第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

3 鋭角三角形△ABCについて，∠A，∠B，∠Cの大きさを，それぞれ A，B，C とする．△ABCの重心をG，外心をOとし，外接円の半径を R とする．

(1) AとOから辺BCに下ろした垂線を，それぞれAD，OEとする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C,\quad \mathrm{OE} = R\cos A$$

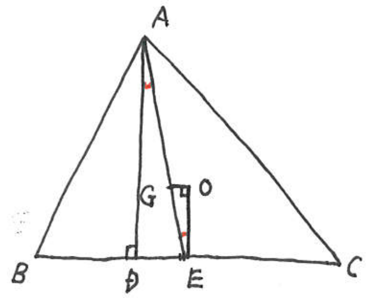
を証明せよ．

(2) GとOが一致するならば△ABCは正三角形であることを証明せよ．

(3) △ABCが正三角形でないとし，さらにOGがBCと平行であるとする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 3\mathrm{OE},\quad \tan B\tan C = 3$$

を証明せよ．



(3) AD // OE より．∠DAE = OEG

また，△DAE，△OEG は直角三角形より

△DAE ∽ △OEG 相似比は AE : EG = 3 : 1

よって，AD = 3OE ■

このとき(1)より．AD = 3OE = $3R\cos A$

∴ $3R\cos A = 2R\sin B\sin C$ ・・・①

ここで $\cos A = \cos\{\pi-(B+C)\}$

$= -\cos(B+C)$

$= -\cos B\cos C + \sin B\sin C$

これを①に代入して

$-3R\cos B\cos C = -R\sin B\sin C$

∴ $\tan B\tan C = 3$ ■